



ชื่อ-สกุล

ชั้น เลขที่



แบบทดสอบก่อนเรียน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 (ค32204)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เรื่อง ทฤษฎีบททวินาม

คำชี้แจง แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

คำสั่ง ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย ✕ ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกต้องที่สุด
เพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดคือการกระจาย $(a - b)^4$

ก. $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

ข. $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

ค. $a^4 - 4a^3b - 6a^2b^2 - 4ab^3 - b^4$

ง. $a^4 + 4a^3b - 6a^2b^2 + 4ab^3 - b^4$

จ. $a^4 - 4a^3b - 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

2. ข้อใดคือการกระจาย $(x + y)^6$

ก. $x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$

ข. $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

ค. $x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 - y^6$

ง. $x^6 + 6x^5y - 15x^4y^2 + 20x^3y^3 - 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

จ. $x^6 - 6x^5y - 15x^4y^2 - 20x^3y^3 - 15x^2y^4 - 6xy^5 - y^6$

3. ข้อใดเป็นสัมประสิทธิ์ของ q^4 ในการกระจาย $(2p + q)^7$

- | | |
|-------|-------|
| ก. 1 | ข. 7 |
| ค. 21 | ง. 35 |
| จ. 40 | |

4. ข้อใดเป็นสัมประสิทธิ์ของ x^5 ในการกระจาย $(x + 3)^6$

- | | |
|--------|--------|
| ก. 1 | ข. 18 |
| ค. 135 | ง. 540 |
| จ. 729 | |

5. ข้อใดเป็นสัมประสิทธิ์ของ a^3b ในการกระจาย $(3a + 2b)^4$

- | | |
|--------|--------|
| ก. 81 | ข. 96 |
| ค. 216 | ง. 220 |
| จ. 448 | |

6. พจน์ที่ 3 จากการกระจาย $(x + y)^4$ คือข้อใด

- | | |
|--------------|------------|
| ก. x^4 | ข. y^4 |
| ค. $4x^3y$ | ง. $4xy^3$ |
| จ. $6x^2y^3$ | |

7. พจน์กลางของทวินาม $(x + 1)^{10}$ เท่ากับข้อใด

- | | |
|-------------|-------------|
| ก. $442x^4$ | ข. $462x^4$ |
| ค. $442x^5$ | ง. $462x^5$ |
| จ. $462x^6$ | |

8. พจน์ที่ 7 จากการกระจาย $\left(\frac{x}{2} + 2\right)^6$ คือข้อใด

ก. x^2

ข. $-x^2$

ค. 64

ง. 8

จ. $\frac{1}{2}$

9. พจน์ที่ 4 จากการกระจาย $(a - 3)^5$ คือข้อใด

ก. $-15a^4$

ข. $90a^3$

ค. -243

ง. $405a$

จ. $-270a^2$

10. พจน์ที่ 2 จากการกระจาย $(4 + 0.01)^4$ คือข้อใด

ก. 0.00000001

ข. 0.000016

ค. 0.0096

ง. 2.56

จ. 256



กระดาศำตอบ แบบทดสอบก่อนเรียน
เรื่อง ทฤษฎีบทวินาม

ข้อที่	ก	ข	ค	ง	จ
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					



ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)

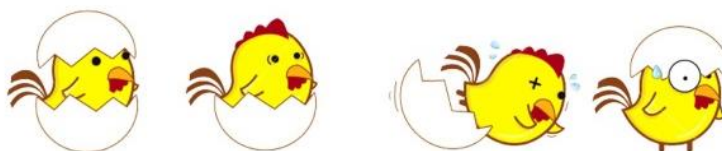
ทฤษฎีบททวินาม เป็นทฤษฎีบทที่ใช้หาผลลัพธ์ในการกระจาย $(a + b)^n$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ให้อยู่ในรูปผลบวกของพจน์ต่าง ๆ ของ $(a + b)^n$

เอกสารประกอบการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 เรื่องความน่าจะเป็น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่มที่ 6 ทฤษฎีบททวินาม จะแบ่งเนื้อหาเป็น 3 ตอน คือ

ตอนที่ 1 ทฤษฎีบททวินาม

ตอนที่ 2 พจน์ที่ $r + 1$

ตอนที่ 3 สามเหลี่ยมปาสคาล



ตอนที่ 1
ทฤษฎีบททวินาม
(Binomial Theorem)



การกระจาย $(a + b)^n$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อย ๆ สามารถใช้วิธีคูณกันของ $(a + b)$ จำนวน n วงเล็บได้ แต่ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามาก ๆ จะใช้วิธีคูณกันของ $(a + b)$ จำนวน n วงเล็บจะทำได้ยาก และเสียเวลาในการคำนวณมาก การนำทฤษฎีบททวินามมาใช้ จะช่วยให้กระจายเลขยกกำลังได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น



ไปศึกษาจากตอนที่ 1 ทฤษฎีบททวินามกันเลยค่า





ทฤษฎีบททวินาม

ผลบวกของตัวแปรสองตัวที่ต่างกัน เรียกว่า ทวินาม เช่น $a + b$, $(a + b)^2$, $(a + b)^5$, $(a + b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

สำหรับการกระจายทวินาม $(a + b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ด้วยสมบัติการแจกแจง เช่น

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

แต่สำหรับ n ที่มีค่ามาก ๆ การกระจาย $(a + b)^n$ ด้วยการคูณกันของ $(a + b)$ จำนวน n วงเล็บ ย่อมเสียเวลาและอาจเกิดข้อผิดพลาดได้ง่าย

เราจะศึกษาวิธีการ การกระจาย $(a + b)^n$
เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ด้วยความสัมพันธ์ของวิธีจัดหมู่
ศึกษาจากกิจกรรมที่ 6.1 กันเลยนะคะ





การกระจายทวินาม



กิจกรรมที่ 6.1

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถหาสัมประสิทธิ์และพจน์ต่าง ๆ ในการกระจาย $(a + b)^n$ ได้

คำสั่ง จงแสดงการกระจายทวินามต่อไปนี้โดยการเขียนผลคูณของพจน์ต่าง ๆ ในรูปการบวก โดยไม่ต้องรวมพจน์ที่เหมือนกัน และแสดงจำนวนวิธีการจัดหมู่ลงในตาราง
ให้นักเรียนสังเกตว่า การกระจายทวินาม และจำนวนวิธีจัดหมู่มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

สถานการณ์ที่ 1

ต้องการกระจายทวินาม $(a + b)^2$ ด้วยการคูณกันของ $(a + b)(a + b)$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ab + bb.....$$

จำนวน a	จำนวน b	จำนวนวิธีจัดหมู่ ที่เลือก b	รูปแบบการจัดหมู่
2	0	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$	aa
1	1	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$	ab
0	2	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$	bb

สถานการณ์ที่ 2

ต้องการกระจายทวินาม $(a + b)^3$ ด้วยการคูณกันของ $(a + b)(a + b)(a + b)$

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = \dots\dots\dots$$

จำนวน a	จำนวน b	จำนวนวิธีจัดหมู่ ที่เลือก b	รูปแบบการจัดหมู่
3	0		
2	1		
1	2		
0	3		

สถานการณ์ที่ 3

ต้องการกระจายทวินาม $(a + b)^4$ ด้วยการคูณกันของ $(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b) = \dots\dots\dots$$

จำนวน a	จำนวน b	จำนวนวิธีจัดหมู่ ที่เลือก b	รูปแบบการจัดหมู่
4	0		
3	1		
2	2		
1	3		
0	4		

จากกิจกรรมที่ 6.1 นักเรียนคิดว่า จำนวนวิธีจัดหมู่ มีความสัมพันธ์
กับจำนวน a และจำนวน b ในแต่ละพจน์อย่างไร



ศึกษาจากบทเรียนต่อไป กันเลยค่ะ





การกระจายทวินาม

การกระจายทวินาม $(a + b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ ด้วยวิธีการคูณกันของ $(a + b)$ จำนวน n วงเล็บ พิจารณาได้ดังนี้

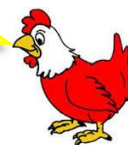
$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b) \times (a + b) \times (a + b) \times \dots \times (a + b)}_{\text{มี } (a + b) \text{ คูณกันอยู่ } n \text{ วงเล็บ}}$$

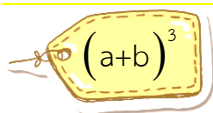
ดังนั้น เมื่อต้องการกระจายทวินาม $(a + b)^n$ ให้อยู่ในรูปผลบวกของพจน์ต่าง ๆ จะสามารถกระจายได้ดังนี้

$$\begin{aligned}(a + b)^0 &= 1 \\(a + b)^1 &= a + b \\(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\(a + b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\&\vdots\end{aligned}$$

สำหรับ n ที่มีค่ามาก ๆ การกระจายทวินาม $(a + b)^n$ โดยการคูณกันของ $(a + b)$ เข้าด้วยกัน n วงเล็บ ย่อมเสียเวลาและอาจเกิดข้อผิดพลาดได้ ดังนั้น เราจึงหาสูตรสำหรับการกระจาย $(a + b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

ขออธิบายตัวอย่างการแสดงความสัมพันธ์
ของการกระจายทวินามกับวิธีจัดหมู่จาก $(a + b)^3$





พิจารณาการกระจายทวินาม $(a + b)^3$ โดยการคูณ $(a + b)(a + b)(a + b)$ ดังนี้

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)(a + b) \\ &= aaa + aba + baa + bba + aab + abb + bab + bbb\end{aligned}$$

เขียนพจน์ด้านขวาของ = ในรูปเลขยกกำลัง แล้วรวมพจน์ที่เหมือนกัน จะได้

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

จากการกระจายทวินามสามารถอธิบายด้วยวิธีจัดหมู่ดังนี้

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)(a + b) \\ &= aaa + aba + baa + bba + aab + abb + bab + bbb \\ &= aaa + aba + baa + aab + bba + abb + bab + bbb \\ &= aaa + aab + aab + aab + abb + abb + abb + bbb\end{aligned}$$

หากพิจารณาว่ามีตัวอักษร a ที่เหมือนกันอยู่ 3 ตัว ตัวอักษร b ที่เหมือนกันอยู่ 3 ตัว แล้วพิจารณาว่าจะมีวิธีจัดหมู่ที่แตกต่างกันได้ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือก a 3 ตัว ไม่เลือก b รูปแบบการจัดหมู่คือ aaa จัดได้ 1 วิธี

$$\text{นั่นคือ } \binom{3}{0} a^3 = 1 \times a^3 = a^3$$

ขั้นตอนที่ 2 เลือก a 2 ตัว เลือก b 1 ตัว รูปแบบการจัดหมู่คือ aab จัดได้ 3 วิธี

$$\text{นั่นคือ } \binom{3}{1} a^2b = 3a^2b$$

ขั้นตอนที่ 3 เลือก a 1 ตัว เลือก b 2 ตัว รูปแบบการจัดหมู่คือ abb จัดได้ 3 วิธี

$$\text{นั่นคือ } \binom{3}{2} ab^2 = 3ab^2$$

ขั้นตอนที่ 4 ไม่เลือก a เลือก b 3 ตัว รูปแบบการจัดหมู่คือ bbb จัดได้ 1 วิธี

$$\text{นั่นคือ } \binom{3}{3} b^3 = 1 \times b^3 = b^3$$

ดังนั้น หากพิจารณาความสอดคล้องของการกระจายทวินาม $(a + b)^3$ กับวิธีจัดหมู่จะพบว่า

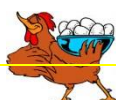
$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &= \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3 \end{aligned}$$

สังเกตว่า ทุกพจน์ของการกระจาย $(a + b)^3$ เขียนในรูป $a^{3-r}b^r$

เมื่อ $r = 0, 1, 2, 3$



จากความสัมพันธ์เช่นนี้ จะเรียกการกระจาย $(a + b)^n$ โดยอาศัยวิธีการจัดหมู่นี้ว่า
ทฤษฎีบททวินาม



๕.....ประกอบกรเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 เรื่องความน่าจะเป็น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ทฤษฎีบททวินาม

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เราสามารถหาผลลัพธ์จากการกระจาย $(a + b)^n$ ได้ดังนี้

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b) \times (a + b) \times (a + b) \times \dots \times (a + b)}_{\text{มี } (a + b) \text{ คูณกันอยู่ } n \text{ วงเล็บ}}$$

การหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่าง ๆ ของการกระจาย $(a + b)^n$ จากวิธีจัดหมู่ของจำนวนจริง a จำนวน n ตัว และจำนวนจริง b จำนวน n ตัว พิจารณาการเลือกจำนวนจริง b ดังนี้

พจน์ที่ 1 เลือก b มา 0 ตัว และเลือก a มาจากทุกวงเล็บ จำนวน n ตัว

$$\text{จะได้ผลคูณเพียง 1 พจน์ คือ } a^n \text{ นั่นคือ } \binom{n}{0} a^n$$

พจน์ที่ 2 เลือก b มา 1 ตัว และเลือก a มา $n - 1$ ตัว จะได้ผลคูณคือ $\binom{n}{1} a^{n-1} b$

พจน์ที่ 3 เลือก b มา 2 ตัว และเลือก a มา $n - 2$ ตัว จะได้ผลคูณคือ $\binom{n}{2} a^{n-2} b^2$

⋮

พจน์ที่ $n + 1$ เลือก b มาจากทุกวงเล็บ และเลือก a มา 0 ตัว จะได้ผลคูณคือ $\binom{n}{n} b^n$

ดังนั้น จะสรุปเป็นทฤษฎีบททวินาม ได้ดังนี้

ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

จำนวน $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{r}, \dots, \binom{n}{n}$ ที่เป็นสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์

ในการกระจาย $(a + b)^n$ เรียกว่า สัมประสิทธิ์ทวินาม (binomial coefficient)

ข้อสังเกตจากทฤษฎีบททวินาม

1. ถ้ากระจายทวินาม $(a + b)^n$ แล้วจะได้ $n + 1$ พจน์
2. เนื่องจาก $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ ทำให้ทราบว่า $\binom{n}{0}a^n = a^n$ และ $\binom{n}{n}b^n = b^n$
3. เลขชี้กำลังของ a เริ่มจาก n แล้วลดลงทีละ 1 จนถึง 0 สำหรับเลขชี้กำลังของ b เริ่มจาก 0 เพิ่มขึ้นทีละ 1 จนถึง n
4. หากสังเกตในแต่ละพจน์ของการกระจายทวินาม แล้วจะพบว่า เลขชี้กำลังของ a บวกกับเลขชี้กำลังของ b จะเท่ากับ n เสมอ



ตัวอย่างที่ 6.1

เอกสารประกอบการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 เรื่องความน่าจะเป็น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

จงเขียน $(1 + b)^5$ ในรูปการกระจาย

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } (1+b)^5 &= \binom{5}{0}1^5b^0 + \binom{5}{1}1^4b^1 + \binom{5}{2}1^3b^2 + \binom{5}{3}1^2b^3 + \binom{5}{4}1^1b^4 + \binom{5}{5}1^0b^5 \\ &= (1)(1^5b^0) + (5)(1^4b^1) + (10)(1^3b^2) + (10)(1^2b^3) + (5)(1^1b^4) + (1)(1^0b^5) \\ &= 1 + 5b + 10b^2 + 10b^3 + 5b^4 + b^5 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6.2

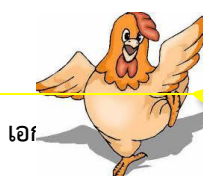
จงเขียน $(a + b)^6$ ในรูปการกระจาย

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } (a + b)^6 &= \binom{6}{0}a^6b^0 + \binom{6}{1}a^5b^1 + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}a^1b^5 + \binom{6}{6}a^0b^6 \\ &= a^6b^0 + 6a^5b^1 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6a^1b^5 + a^0b^6 \\ &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6.3

จงเขียน $(2x + y)^4$ ในรูปการกระจาย

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } (2x + y)^4 &= \binom{4}{0}(2x)^4(y^0) + \binom{4}{1}(2x)^3(y^1) + \binom{4}{2}(2x)^2(y^2) + \binom{4}{3}(2x)^1(y^3) + \binom{4}{4}(2x)^0(y^4) \\ &= (1)(16x^4)(1) + (4)(8x^3)(y) + (6)(4x^2)(y^2) + (4)(2x)(y^3) + (1)(1)(y^4) \\ &= 16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4 \end{aligned}$$



เราสามารถใช้อยู่ในเรื่องการกระจายทวินาม
 ช่วยในการกระจายเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก
 ที่มีค่ามากได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6.4 จงใช้ทฤษฎีบททวินามช่วยในการเขียน 2.01^{10} ในรูปทศนิยม 4 ตำแหน่ง

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } 2.01^{10} &= (2 + 0.01)^{10} \\ &= 2^{10} + \binom{10}{1}(2)^9(0.01)^1 + \binom{10}{2}(2)^8(0.01)^2 + \binom{10}{3}(2)^7(0.01)^3 + \dots + (0.01)^{10} \\ &= 1,024 + (5,120)(0.01) + (11,520)(0.0001) + (15,360)(0.000001) \\ &= 1,024 + 51.2 + 1.152 + 0.001536 \\ &= 1,076.3674 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 2.01^{10} = 1,076.3674$$

ตัวอย่างที่ 6.5 จงใช้ทฤษฎีบททวินามช่วยในการเขียน 0.98^{12} ในรูปทศนิยม 4 ตำแหน่ง

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } 0.98^{12} &= (1 - 0.02)^{12} \\ &= 1^{12} + \binom{12}{1}(1)^{11}(-0.02)^1 + \binom{12}{2}(1)^{10}(-0.02)^2 + \binom{12}{3}(1)^9(-0.02)^3 + \dots + (-0.02)^{12} \\ &= 1 + (12)(-0.02) + (66)(0.0004) + (220)(-0.000008) \\ &= 1 - 0.24 + 0.0264 - 0.00176 \\ &= 0.7845 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 0.98^{12} = 0.7845$$

ตัวอย่างที่ 6.6

เอกสารประกอบการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 เรื่องความน่าจะเป็น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

จงใช้ทฤษฎีบททวินามช่วยในการเขียน 21^4

วิธีทำ $21^4 = (20 + 1)^4$

$$= \binom{4}{0} 20^4 + \binom{4}{1} (20)^3 (1)^1 + \binom{4}{2} (20)^2 (1)^2 + \binom{4}{3} (20)^1 (1)^3 + \binom{4}{4} (1)^4$$

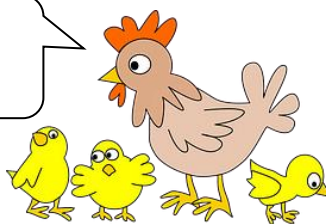
$$= 20^4 + (4)(20)^3 (1)^1 + (6)(20)^2 (1)^2 + (4)(20)^1 (1)^3 + (1)^4$$

$$= 160,000 + 32,000 + 2,400 + 80 + 1$$

$$= 194,481$$

ดังนั้น $21^4 = 194,481$

ลองไปทำแบบฝึกกันนะคะ



แบบฝึกที่ 6.1

เอกสารประกอบการเรียนรายวิชา... น่าจะเป็น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถใช้ทฤษฎีบททวินามในการกระจาย $(a + b)^n$ ได้

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำประกอบการหาคำตอบ ทุกข้อ

1. จงใช้ทฤษฎีบททวินาม ในการกระจายทวินามต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 1.1 \quad (3p + 2)^4 &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2 \quad (3 - g)^6 &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.3 \quad (5k - 2)^6 &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.4 \quad \left(2x - \frac{1}{x}\right)^4 &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.5 \quad \left(x - \frac{1}{x}\right)^6 &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$



2. จงหาค่าต่อไปนี้โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม และให้ตอบทศนิยมไม่เกิน 4 ตำแหน่ง

$$2.1 \quad (0.93)^5 = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$2.2 \quad (1.02)^5 = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$2.3 \quad (3.02)^4 = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$2.4 \quad (11)^5 = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$2.5 \quad (102)^4 = \dots\dots\dots$$

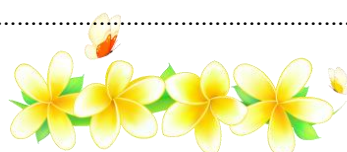
$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$





พจน์ที่ $r + 1$

สำหรับการกระจายทวินาม $(a + b)^n$ ซึ่งเขียนในรูปผลบวกของ $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

เมื่อ $r = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ซึ่ง

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

หากเราต้องการทราบเพียงพจน์ใดพจน์หนึ่ง ของการกระจายทวินาม $(a + b)^n$ เพียงพจน์เดียวของการกระจายนี้ เราจะมีวิธีการหาพจน์นั้นได้อย่างไรโดยไม่ต้องกระจายทวินามทั้งหมด เพราะจะทำให้เสียเวลา จะมีวิธีในการหาพจน์ที่ต้องการนั้นอย่างไร

ไปทำกิจกรรมที่ 6.2 กันเลยจ้า



กิจกรรมที่ 6.2



พจน์ที่ $r + 1$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถหาสัมประสิทธิ์และพจน์ต่าง ๆ ในการกระจาย $(a + b)^n$ ได้

คำสั่ง จงพิจารณาการกระจายทวินาม ที่กระจายในรูปอนุกรมของพจน์ $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

เมื่อ $0 \leq r \leq n$ แล้วเติมพจน์ต่าง ๆ ให้ถูกต้อง

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

พบว่า

พจน์ที่ 1 คือ

พจน์ที่ 2 คือ

พจน์ที่ 3 คือ

พจน์ที่ 4 คือ

⋮

พจน์ที่ $r + 1$ คือ

⋮

พจน์ที่ n คือ

ดังนั้น

พจน์ที่ $r + 1$ คือ



พจน์ที่ $r + 1$

จากการพิจารณาการกระจายของทวินาม $(a + b)^n$ โดยพิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ที่ n เลขชี้กำลังของ a และ b และสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ พบว่า

พจน์ที่	ค่าของพจน์ ที่ได้จากการ กระจายทวินาม	เลขชี้กำลัง ของ a	เลขชี้กำลัง ของ b	สัมประสิทธิ์ ของแต่ละพจน์
1	$\binom{n}{0} a^n b^0$	n	0	$\binom{n}{0}$
2	$\binom{n}{1} a^{n-1} b^1$	$n - 1$	1	$\binom{n}{1}$
3	$\binom{n}{2} a^{n-2} b^2$	$n - 2$	2	$\binom{n}{2}$
$\vdots$				
r	$\binom{n}{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}$	$n - r + 1$	$r - 1$	$\binom{n}{r-1}$
$r + 1$	$\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$	$n - r$	r	$\binom{n}{r}$
$\vdots$				
n	$\binom{n}{n} a^0 b^n$	0	n	$\binom{n}{n}$

แสดงว่า ถ้าต้องการทราบพจน์ที่ $r + 1$ ของการกระจาย $(a + b)^n$ จะสามารถหาได้จาก

$$\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

กำหนดให้ T_{r+1} แทนพจน์ที่ $r+1$ ของการกระจาย $(a+b)^n$

$$\text{ดังนั้น } T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \quad \text{เมื่อ } 0 \leq r \leq n$$



ไปศึกษาตัวอย่างการหา T_{r+1} กันเลยนะคะ

ตัวอย่างที่ 6.7

จงหาพจน์ที่ 5 ของการกระจาย $\left(\frac{1}{2}a + 2b\right)^8$

วิธีทำ พจน์ที่ $r+1$ คือ $T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

ดังนั้น พจน์ที่ 5 ของการกระจาย $\left(\frac{1}{2}a + 2b\right)^8$ คือ

$$\begin{aligned} T_{4+1} &= \binom{8}{4} \left(\frac{1}{2}a\right)^4 (2b)^4 \\ &= \frac{8!}{4!4!} \left(\frac{1}{16}a^4 16b^4\right) \\ &= 70a^4b^4 \end{aligned}$$

นั่นคือ พจน์ที่ 5 ของการกระจาย $\left(\frac{1}{2}a + 2b\right)^8$ คือ $70a^4b^4$

ตัวอย่างที่ 6.8

จงหาพจน์ที่ 5 ของการกระจาย $(x^2 + \frac{1}{x})^{10}$ เรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 เรื่องความน่าจะเป็น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

จงหาพจน์ที่ 6 ของการกระจาย $(x - 3)^{10}$

วิธีทำ พจน์ที่ $r + 1$ คือ $T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$
 ดังนั้น พจน์ที่ 6 ของการกระจาย $(x - 3)^{10}$ คือ

$$\begin{aligned} T_{5+1} &= \binom{10}{5} (x)^{10-5} (-3)^5 \\ &= \frac{10!}{(10-5)!5!} (x)^5 (-3)^5 \\ &= (252)(-27)x^5 \\ &= -6,804x^5 \end{aligned}$$

นั่นคือ พจน์ที่ 6 ของการกระจาย $(x - 3)^{10}$ คือ $-6,804x^5$

ตัวอย่างที่ 6.9

จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์กลางจากการกระจาย $\left(y^2 - \frac{1}{3}\right)^6$

วิธีทำ พจน์กลางของการกระจาย $\left(y^2 - \frac{1}{3}\right)^6$ คือ พจน์ที่ 4 เนื่องจากการกระจาย 7 พจน์

$$\begin{aligned} \text{จาก } T_{r+1} &= \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \\ T_{3+1} &= \binom{6}{3} (y^2)^{6-3} \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \\ &= \frac{6!}{(6-3)!3!} (y^2)^3 \left(-\frac{1}{27}\right) \\ &= 20y^6 \left(-\frac{1}{27}\right) \\ &= -\frac{20}{27}y^6 \end{aligned}$$

สัมประสิทธิ์ของพจน์กลางของการกระจาย $\left(y^2 - \frac{1}{3}\right)^6$ คือ $-\frac{20}{27}$

ตัวอย่างที่ 6.10

จงหาพจน์ที่ไม่มี x จากการกระจาย $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$

วิธีทำ

พจน์ที่ไม่มี x คือพจน์ที่มี x^0

สมมติให้พจน์ที่มี x^0 เป็นพจน์ที่ $r+1$

$$\begin{aligned} \text{จาก } T_{r+1} &= \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \\ &= \binom{12}{r} (x^2)^{12-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r \\ &= \binom{12}{r} x^{24-2r} x^{-r} \\ &= \binom{12}{r} x^{24-3r} \end{aligned}$$

โจทย์กำหนดว่าพจน์ที่ไม่มี x คือพจน์ที่มี x^0

นั่นแสดงว่า $24 - 3r = 0$

$$24 = 3r$$

$$\frac{24}{3} = r$$

$$8 = r$$

$$r = 8$$

พจน์ที่ไม่มี x คือพจน์ที่ $8+1$ คือพจน์ 9



ตัวอย่างที่ 6.11

จากการกระจายทวินาม $(3x + 4y)^{10}$ จงหา

- 1) สัมประสิทธิ์ของ $x^4 y^6$
- 2) สัมประสิทธิ์ของพจน์กลาง
- 3) สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ไม่มี x

วิธีทำ

- 1) จากทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่มี $x^4 y^6$ ของ $(3x + 4y)^{10}$ คือ

$$\begin{aligned} \binom{10}{6} (3x)^4 (4y)^6 &= \frac{10!}{(10-6)!6!} (3x)^4 (4y)^6 \\ &= 210(3x)^4 (4y)^6 \\ &= 210(3)^4 (4)^6 x^4 y^6 \\ &= 69,672,960 x^4 y^6 \end{aligned}$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ $x^4 y^6$ ของ $(3x + 4y)^{10}$ คือ 69,672,960

- 2) พจน์กลางของการกระจาย $(3x + 4y)^{10}$

คือ พจน์ที่ 6 เนื่องจากการกระจาย 11 พจน์

$$\begin{aligned} \text{จาก } T_{r+1} &= \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \\ T_{5+1} &= \binom{10}{5} (3x)^{10-5} (4y)^5 \\ &= \frac{10!}{(10-5)!5!} (3x)^5 (4y)^5 \\ &= 252(3)^5 x^5 (4)^5 y^5 \\ &= 252(243)(1,024)x^5 y^5 \\ &= 62,705,664 x^5 y^5 \end{aligned}$$

สัมประสิทธิ์ของพจน์กลางการกระจาย $(3x + 4y)^{10}$ คือ 62,705,664

3) สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ไม่มี x ของการกระจาย $(3x + 4y)^{10}$

พจน์ที่ไม่มี x คือพจน์ที่มี x^0 สมมติให้พจน์ที่มี x^0 เป็นพจน์ที่ $r + 1$

$$\begin{aligned} \text{จาก } T_{r+1} &= \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \\ &= \binom{10}{r} (3x)^{10-r} (4y)^r \\ &= \binom{10}{r} (3x)^{10-r} (4y)^r \end{aligned}$$

โจทย์กำหนดว่าพจน์ที่ไม่มี x คือพจน์ที่มี x^0

$$\text{แสดงว่า } 10 - r = 0$$

$$10 = r$$

$$r = 10$$

ดังนั้น พจน์ที่ไม่มี x คือพจน์ที่ $10 + 1$ คือพจน์ 11

พร้อมทำแบบฝึกหัดหรือยังคะ

ถ้าพร้อมแล้วไปทำแบบฝึกกันเลยคะ



แบบฝึกที่ 6.2

จุดประสงค์การเรียนรู้ : นักเรียนสามารถหาสัมประสิทธิ์และพจน์ต่าง ๆ ในการกระจาย $(a + b)^n$ ได้

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำประกอบการหาคำตอบ ทุกข้อ

1. จงหาพจน์ที่ 5 ของการกระจาย $(x + y)^{10}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. จงหาพจน์ที่ 6 ของการกระจาย $(2x - 3y)^{12}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงหาพจน์กลาง ของการกระจาย $(3x + y)^8$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีตัวแปร $x^4 y^5$ ของการกระจาย $(2x - 2y)^9$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

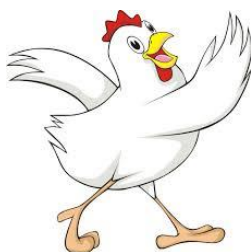
.....



มีนักคณิตศาสตร์ท่านหนึ่ง ได้พบความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ของการกระจายทวินาม $(a + b)^n$ เมื่อนำสัมประสิทธิ์ของการกระจายทวินามมาเรียงต่อกันเป็นแถว ๆ แล้วจะมีความสัมพันธ์กันอย่างหนึ่งที่น่าสนใจ



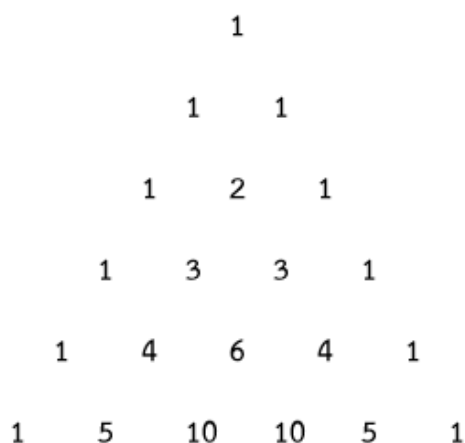
เราไปศึกษาความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ของ $a^n + b^n$ (เมื่อ $r = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) จากการกระจายทวินาม $(a + b)^n$ กับแบบรูปของจำนวนชนิดหนึ่ง ไปศึกษาจากตอนที่ 3 สามเหลี่ยมปาสคาล กันได้เลยนะคะ





สามเหลี่ยมปาสคาล (Pascal's triangle)

นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ชื่อ Blaise Pascal (ค.ศ. 1623 - ค.ศ. 1662) ได้ทำการศึกษาต่อจากนักคณิตศาสตร์ชาวจีนชื่อ Yanghui (ค.ศ. 1238 - 1298) และนักดาราศาสตร์กวีนิพนธ์ชาวเปอร์เซียชื่อ Omar Khayya'm (ค.ศ. 1048-1131) ที่สังเกตพบความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ของการกระจายของ $(a + b)^n$ โดยสังเกตเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่าง ๆ จะสัมพันธ์กับสัมประสิทธิ์ของการกระจายของ $(a + b)^{n-1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2 และโดยที่จำนวนที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ เรียงตัวเป็นรูปสามเหลี่ยม เรียกรูปสามเหลี่ยมปาสคาล (Pascal's triangle)



ไปทำกิจกรรมที่ 6.3 กันเลย



กิจกรรมที่ 6.3



สามเหลี่ยมปาสคาล

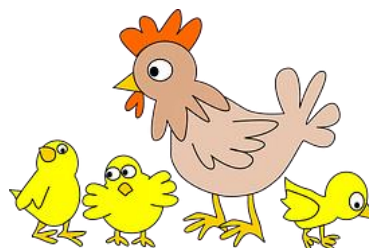
จุดประสงค์การเรียนรู้ : นักเรียนสามารถหาความสัมพันธ์ของจำนวนในสามเหลี่ยมปาสคาล และใช้ในการแก้ปัญหาในเรื่องทฤษฎีบททวินามได้

คำสั่ง จงหาความสัมพันธ์ของจำนวนที่ปรากฏในแบบรูปข้างล่างนี้ และเติมจำนวนต่อไปอีก 3 แถว

				1						
			1		1					
		1		2		1				
	1		3		3		1			
	1	4		6		4		1		
	1	5	10		10		5		1	
.....										
.....										
.....										

นักเรียนคิดว่าความสัมพันธ์ของการเกิดจำนวน ในแต่ละแถวคือ

.....

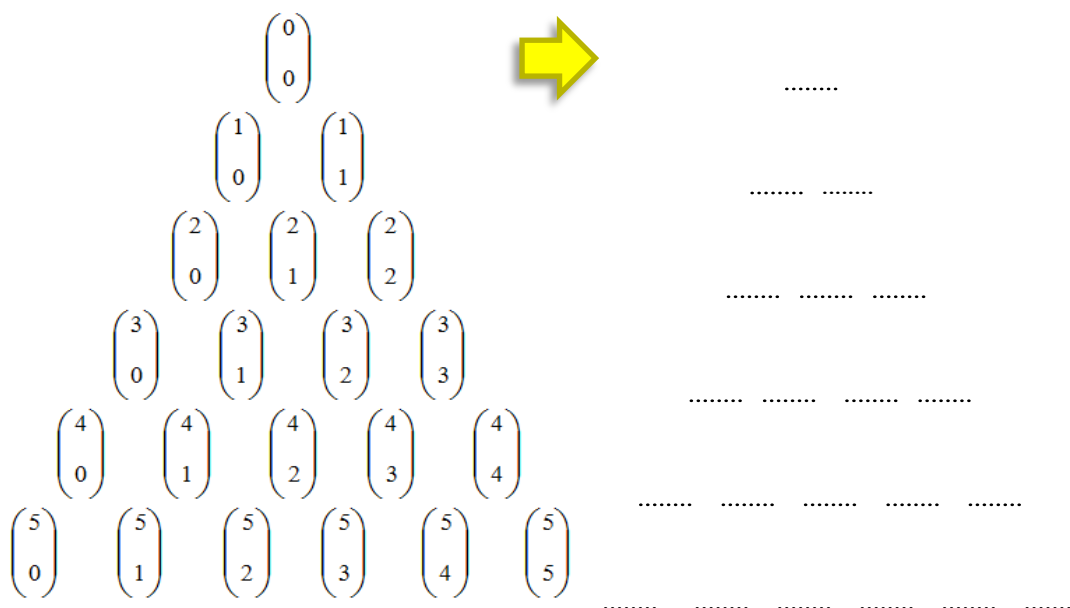




สามเหลี่ยมปาสคาล กับสัมประสิทธิ์ทวินาม

จุดประสงค์การเรียนรู้ : นักเรียนสามารถหาความสัมพันธ์ของจำนวนในสามเหลี่ยมปาสคาล และใช้ในการแก้ปัญหาในเรื่องทฤษฎีบททวินามได้

คำสั่ง จงคำนวณวิธีจัดหมู่ในแต่ละแถว ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของการกระจายทวินาม แล้วเติมคำตอบในช่องว่างจากแบบรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้



จากจำนวนในรูปสามเหลี่ยมปาสคาล และสัมประสิทธิ์ของการกระจายทวินาม ในแต่ละแถว นักเรียนคิดว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร

.....



สามเหลี่ยมปาสคาล กับทฤษฎีบททวินาม

พิจารณาสัมประสิทธิ์ของ $(a + b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก หรือศูนย์ ดังนี้

การกระจายของ $(a + b)^n$	สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์
$(a + b)^0 =$	1
$(a + b)^1 =$	1 1
$(a + b)^2 =$	1 2 1
$(a + b)^3 =$	1 3 3 1
$(a + b)^4 =$	1 4 6 4 1
$(a + b)^5 =$	1 5 10 10 5 1
$(a + b)^6 =$	1 6 15 20 15 6 1
$\vdots$	$\vdots$

เมื่อพิจารณาเฉพาะสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ของการกระจายทวินาม $(a + b)^n$

$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1
$\vdots$	$\vdots$

พบว่า สอดคล้องกับจำนวนในแต่ละแถวของรูปสามเหลี่ยมปาสคาล

ข้อสังเกต

ตัวเลขที่ปรากฏในสามเหลี่ยมปาสคาลนี้ เราสามารถสร้างต่อไปได้เรื่อย ๆ ไม่มีที่สิ้นสุด โดยมีหลักการและคุณสมบัติ ดังนี้

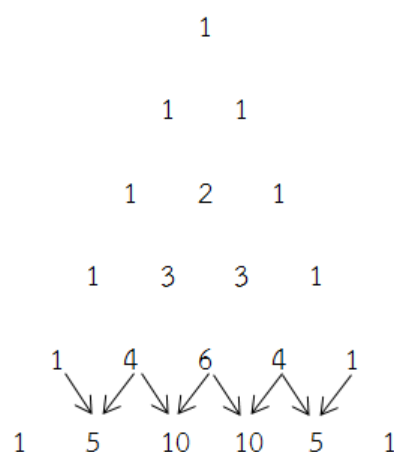
- 1) การกระจายของ $(a + b)^n$ มี $n + 1$ พจน์
- 2) เลขชี้กำลังของ a เริ่มที่ n และลดลงทีละ 1 จนเป็น 0 ในพจน์สุดท้าย
- 3) เลขชี้กำลังของ b เริ่มที่ 0 ในพจน์แรก และเพิ่มขึ้นทีละ 1 จนกระทั่งเป็น n ในพจน์สุดท้าย

- 4) ผลบวกของเลขชี้กำลังของ a และ b ในแต่ละพจน์เท่ากับ n

- 5) พจน์แรกและพจน์สุดท้ายมีสัมประสิทธิ์เป็น 1 จาก $\binom{n}{0}$ และ $\binom{n}{n}$

6) สัมประสิทธิ์ของพจน์อื่น ๆ เช่น สัมประสิทธิ์ของการกระจายของ $(a + b)^5$ เมื่อเรียงพจน์ที่มีเลขชี้กำลังของ a จากมากไปน้อย จะได้สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สองถึงพจน์ที่ห้า เป็น 5, 10, 10 และ 5 ตามลำดับ นั่นคือ

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$



โดยที่สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์มีความเกี่ยวข้องกัน ดังนี้

5 ได้จาก 1 และ 4 เมื่อ 1 และ 4 เป็นสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่หนึ่งและพจน์ที่สองของการกระจายของ $(a + b)^4$ ตามลำดับ

10 ได้จาก 4 และ 6 เมื่อ 4 และ 6 เป็นสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สองและพจน์ที่สามของการกระจายของ $(a + b)^4$ ตามลำดับ

10 ได้จาก 6 และ 4 เมื่อ 6 และ 4 เป็นสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สามและพจน์ที่สี่ของการกระจายของ $(a + b)^4$ ตามลำดับ

5 ได้จาก 4 และ 1 เมื่อ 4 และ 1 เป็นสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สี่และพจน์ที่ห้าของการกระจายของ $(a + b)^4$ ตามลำดับ

7) สามเหลี่ยมปาสคาล เป็นสามเหลี่ยมสมมาตรในแต่ละแถว จำนวนที่อยู่ห่างจากตัวริมสุดเข้ามาข้างละเท่า ๆ กัน จะมีค่าเท่ากัน

8) จำนวนแรก และจำนวนสุดท้าย ในแต่ละแถวเท่ากับ 1 เพราะ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

9) ในแต่ละแถว จำนวนแต่ละจำนวน ยกเว้นตัวแรกและตัวสุดท้ายจะมีค่าเท่ากับผลบวกของจำนวน 2 จำนวน ที่อยู่ทางขวาและทางซ้ายของจำนวนนั้น ซึ่งอยู่ในแถบบน เช่น

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

10) ในแถวที่ n ของสามเหลี่ยมปาสคาล จะมีจำนวนอยู่ $n + 1$ จำนวน คือ

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$$

ศึกษาการใช้สามเหลี่ยมปาสคาลในการกระจายทวินาม
จากตัวอย่างต่อไปนี้ได้เลยค่ะ



ตัวอย่างที่ 6.12

จงเขียน $(2a - b)^4$ ในรูปกระจายโดยใช้สามเหลี่ยมปาสคาล

วิธีทำ เนื่องจาก $n = 4$ จึงใช้ตัวเลขในสามเหลี่ยมปาสคาลแถวที่ 5

เป็นสัมประสิทธิ์ในการกระจายทวินาม นั่นคือ 1, 4, 6, 4, 1

$$\begin{aligned}(2a-b)^4 &= 1(2a)^4(-b)^0 + 4(2a)^3(-b)^1 + 6(2a)^2(-b)^2 + 4(2a)^1(-b)^3 + 1(2a)^0(-b)^4 \\&= (1)(16a^4) + (4)(8a^3)(-b) + (6)(4a^2)(b^2) + (4)(2a)(-b^3) + (1)(1)(b^4) \\&= 16a^4 - 32a^3b + 24a^2b^2 - 8ab^3 + b^4\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6.13

จงเขียน $(x + y^2)^5$ ในรูปกระจายโดยใช้สามเหลี่ยมปาสคาล

วิธีทำ เนื่องจาก $n = 5$ จึงใช้ตัวเลขในสามเหลี่ยมปาสคาลแถวที่ 6

เป็นสัมประสิทธิ์ในการกระจายทวินาม นั่นคือ 1, 5, 10, 10, 5, 1

$$\begin{aligned}(x + y^2)^5 &= 1x^5y^0 + 5x^4(y^2)^1 + 10x^3(y^2)^2 + 10x^2(y^2)^3 + 5x(y^2)^4 + 1x^0(y^2)^5 \\&= x^5 + 5x^4y^2 + 10x^3y^4 + 10x^2y^6 + 5xy^8 + y^{10}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6.14

จงเขียน $(f + 2)^7$ ในรูปกระจายโดยใช้สามเหลี่ยมปาสคาล

วิธีทำ เนื่องจาก $n = 7$ จึงใช้ตัวเลขในสามเหลี่ยมปาสคาลแถวที่ 8

เป็นสัมประสิทธิ์ในการกระจายทวินาม นั่นคือ 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

$$\begin{aligned}(f + 2)^7 &= (1)(f)^7(2)^0 + (7)(f)^6(2)^1 + (21)(f)^5(2)^2 + (35)(f)^4(2)^3 + (35)(f)^3(2)^4 + (21)(f)^2(2)^5 + (7)(f)^1(2)^6 + (1)(f)^0(2)^7 \\&= f^7 + 14f^6 + 84f^5 + 280f^4 + 560f^3 + 672f^2 + 448f + 128\end{aligned}$$

ไปดูตัวอย่างของความสัมพันธ์ของจำนวน
บนสามเหลี่ยมปาสคาล กันนะคะ



ตัวอย่างที่ 6.15

จากความสัมพันธ์บนรูปสามเหลี่ยมปาสคาล จงหาคำตอบของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & & \\
 & & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & & \\
 & & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} & \\
 & \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} & & \\
 & & & \vdots & & & & \\
 \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 1) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 2) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 3) \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\
 4) \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

ไปทำแบบฝึกกันคะ



แบบฝึกที่ 6.3

จุดประสงค์การเรียนรู้ : นักเรียนสามารถหาความสัมพันธ์ของจำนวนในสามเหลี่ยมปาสคาล
และใช้ในการแก้ปัญหาในเรื่องทฤษฎีบททวินามได้

คำสั่ง จงแสดงวิธีทำประกอบการหาคำตอบ ทุกข้อ

1. จงใช้สามเหลี่ยมปาสคาลในการกระจายทวินามต่อไปนี้

1.1 $(2x + 3)^5 =$

.....
.....
.....

1.2 $(2p - 1)^7 =$

.....
.....
.....

1.3 $(f^2 - 2)^7 =$

.....
.....
.....

1.4 $\left(d - \frac{1}{2}\right)^8 =$

.....
.....
.....

1.5 $(2 - m)^{10} =$

.....
.....
.....

2. จากความรู้ในเรื่องสามเหลี่ยมปาสคาล “จำนวนแรกและจำนวนสุดท้ายในแต่ละแถวเป็นเลข 1 ส่วนจำนวนอื่น ๆ ได้จากผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่อยู่เหนือจำนวนนั้น”

ถ้ากำหนดให้ จำนวนในรูปสามเหลี่ยมปาสคาลเป็นลำดับชนิดหนึ่ง โดยที่ n เป็นจำนวนพจน์ในแต่ละแถว และ r เป็นพจน์ที่เราสนใจ ซึ่งเกิดจากผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่อยู่เหนือจำนวนนั้น จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับนี้ (ประโยคที่ขีดเส้นใต้) ในรูปของ $\binom{n}{r}$ ที่สอดคล้องกับจำนวนในรูปสามเหลี่ยมปาสคาล

การกระจาย	สัมประสิทธิ์					
$(a + b)^0$	1					
$(a + b)^1$	1		1			
$(a + b)^2$	1		2	1		
$(a + b)^3$	1	3	3	1		
$(a + b)^4$	1	4	6	4	1	
$(a + b)^5$	1	5	10	10	5	1

ตัวอย่าง พิจารณา แถวที่ 5

พบว่า $n = 5$ เลือก $r = 2$ ซึ่งเป็นตำแหน่งของ 4
 4 เกิดจาก $1 + 3$ 1 มาจาก พจน์ที่ 1 ของแถวก่อนหน้า
 3. มาจาก พจน์ที่ 2 ของแถวก่อนหน้า

พิจารณา แถวที่ 6

พบว่า $n = 6$ เลือก $r = 4$ ซึ่งเป็นตำแหน่งของ 10
 10 เกิดจาก $6 + 4$ 6 มาจาก พจน์ที่ 3 ของแถวก่อนหน้า
 4. มาจาก พจน์ที่ 4 ของแถวก่อนหน้า

ดังนั้น ถ้าพิจารณา แถวที่ n

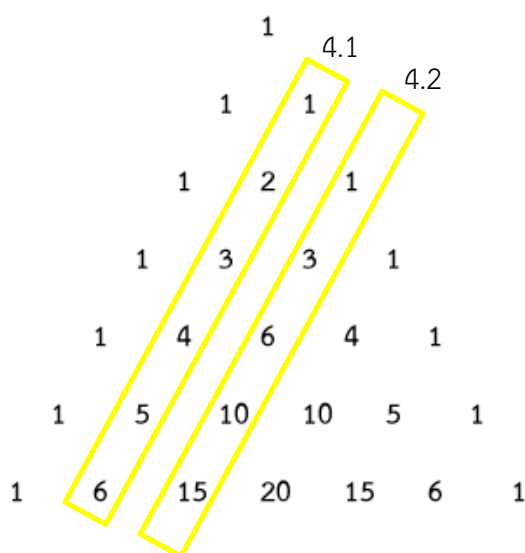
พบว่า $n = n$ เลือก $r = r$ ซึ่งเป็นตำแหน่งของ $\binom{n}{r}$

$$\binom{n}{r} \text{ เกิดจาก } \dots + \dots$$

3. จงหาผลบวกของจำนวนทุกจำนวนในแถวที่ n ของสามเหลี่ยมปาสคาล และพจน์ทั่วไปของผลบวกในแต่ละแถวนี้ด้วย

1	ผลบวกแถวที่ 1 เท่ากับ.....
1 1	ผลบวกแถวที่ 2 เท่ากับ.....
1 2 1	ผลบวกแถวที่ 3 เท่ากับ.....
1 3 3 1	ผลบวกแถวที่ 4 เท่ากับ.....
1 4 6 4 1	ผลบวกแถวที่ 5 เท่ากับ.....
1 5 10 10 5 1	ผลบวกแถวที่ 6 เท่ากับ.....
	ผลบวกแถวที่ n เท่ากับ.....

4. จากรูปสามเหลี่ยมปาสคาล เมื่อกำหนดให้เป็นแบบรูปของลำดับชนิดหนึ่ง จงหาพจน์ทั่วไปของจำนวนในรูปสามเหลี่ยมปาสคาล ในกรอบสี่เหลี่ยมที่กำหนด



4.1

.....

.....

.....

.....

4.2

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แบบทดสอบหลังเรียน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 (ค32204)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เรื่อง ทฤษฎีบททวินาม

คำชี้แจง แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

คำสั่ง ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย ✕ ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกต้องที่สุด
เพียงคำตอบเดียว1. ข้อใดคือการกระจาย $(x + y)^6$

- ก. $x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$
 ข. $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$
 ค. $x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 - y^6$
 ง. $x^6 + 6x^5y - 15x^4y^2 + 20x^3y^3 - 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$
 จ. $x^6 - 6x^5y - 15x^4y^2 - 20x^3y^3 - 15x^2y^4 - 6xy^5 - y^6$

2. ข้อใดคือการกระจาย $(a - b)^4$

- ก. $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
 ข. $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
 ค. $a^4 - 4a^3b - 6a^2b^2 - 4ab^3 - b^4$
 ง. $a^4 + 4a^3b - 6a^2b^2 + 4ab^3 - b^4$
 จ. $a^4 - 4a^3b - 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

3. ข้อใดเป็นสัมประสิทธิ์ของ x^5 ในการกระจาย $(x + 3)^6$

- | | |
|--------|--------|
| ก. 1 | ข. 18 |
| ค. 135 | ง. 540 |
| จ. 729 | |

4. ข้อใดเป็นสัมประสิทธิ์ของ b^4 ในการกระจาย $(2a + b)^7$

- | | |
|-------|-------|
| ก. 1 | ข. 7 |
| ค. 21 | ง. 35 |
| จ. 40 | |

5. พจน์ที่ 3 จากการกระจาย $(x + y)^4$ คือข้อใด

- | | |
|--------------|------------|
| ก. x^4 | ข. y^4 |
| ค. $4x^3y$ | ง. $4xy^3$ |
| จ. $6x^2y^3$ | |

6. พจน์กลางของทวินาม $(x + 1)^{10}$ เท่ากับข้อใด

- | | |
|-------------|-------------|
| ก. $442x^4$ | ข. $462x^4$ |
| ค. $442x^4$ | ง. $462x^5$ |
| จ. $462x^6$ | |

7. ข้อใดเป็นสัมประสิทธิ์ของ p^3q ในการกระจาย $(3p + 2q)^4$

- | | |
|--------|--------|
| ก. 81 | ข. 96 |
| ค. 216 | ง. 220 |
| จ. 448 | |

8. พจน์ที่ 4 จากการกระจาย $(a - 3)^5$ คือข้อใด

ก. $-15a^4$

ข. $90a^3$

ค. -243

ง. $405a$

จ. $-270a^2$

9. พจน์ที่ 7 จากการกระจาย $\left(\frac{x}{2} + 2\right)^6$ คือข้อใด

ก. x^2

ข. $-x^2$

ค. 64

ง. 8

จ. $\frac{1}{2}$

10. พจน์ที่ 2 จากการกระจาย $(4 + 0.01)^4$ คือข้อใด

ก. 0.00000001

ข. 0.000016

ค. 0.0096

ง. 2.56

จ. 256



กระดานคำตอบ แบบทดสอบหลังเรียน
เรื่อง ทฤษฎีบทวินาม

ข้อที่	ก	ข	ค	ง	จ
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					



แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน

เล่ม 6 ทฤษฎีบทวินาม

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	ความก้าวหน้า	คิดเป็นร้อยละ
การทดสอบก่อนเรียน	10			
การทดสอบหลังเรียน	10			



แบบบันทึกคะแนนความก้าวหน้าของแบบฝึกหัดระหว่างเรียน

เล่ม 6 ทฤษฎีบททวินาม

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

แบบฝึกที่	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	คิดเป็นร้อยละ	ผ่านเกณฑ์*	ไม่ผ่านเกณฑ์**
6.1	30				
6.2	15				
6.3	27				
รวมทั้งหมด	72				
เฉลี่ย					
คิดเป็นร้อยละ					

* ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนร้อยละ 75 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

** ไม่ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนน้อยกว่าร้อยละ 75 ของคะแนนเต็ม



บรรณานุกรม

กนกวลี อุษณกรกุล เรณู สุทธิวารี และรณชัย มาเจริญทรัพย์. เตรียมสอบ PET 1

คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 4 ม.4-6. กรุงเทพฯ: ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.

กมล เอกไทยเจริญ. คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 6 ค016. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง.

_____. (2557). เทคนิคการทำโจทย์ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ม.5 เทอม 2. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง.

คณิต มงคลพิทักษ์สุข. HI-SPEED MATHS FOR PAT1 & EXAM. กรุงเทพฯ: SCIENCE CENTER.

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (2556). คู่มือประกอบการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4 – 6 เล่ม 4. กรุงเทพฯ: พ.ศ. พัฒนา จำกัด.

ฉวีวรรณ เสวตมาลย์ และคณะ. (2545). กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-6) เล่ม 3. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: ประสารมิตร.

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). 1001 TESTS IN MATHS 3. กรุงเทพฯ: แม็ค.

พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร. (2555). คู่มือคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4 – 6 เล่ม 4. กรุงเทพฯ: เดอร์บุคส์.

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. (2542). แนวคิดหลักมูล

ทางคณิตศาสตร์ 1. 500 เล่ม. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

เลิศ สิทธิโกศล. (2555). Math Review คณิตศาสตร์ ม.4 – 6 เล่ม 4 (เพิ่มเติม). กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง.

สถาบันส่งเสริมการสอนการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.). (2544). เอกสารเสริม

ความรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง คอมบินาทอริก. 3,000 เล่ม. พิมพ์ครั้งที่ 1.

กรุงเทพฯ: สำนักพัฒนาธุรกิจ.

_____. (2553). หนังสือเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เล่ม 4. 350,000 เล่ม. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: สกสค. ลาดพร้าว.

_____. (2553). คู่มือครูรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เล่ม 4. 5,000 เล่ม. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: สกสค. ลาดพร้าว.

สมพร สุนันท์โอภาส. (2539). คณิตศาสตร์ทางด้านวิธีจัดหมู่เบื้องต้น. 1,000 เล่ม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

เอกสารประกอบการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 เรื่องความน่าจะเป็น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

บรรณานุกรม (ต่อ)

สมัย เหล่าวานิชย์. **คู่มือคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพรณ เหล่าวานิชย์. **คณิตศาสตร์4 พื้นฐาน + เพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

สุเทพ จันทรสมบัติ และสุเทพ ทองอยู่. **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ 6 ม.6 เล่ม 6 ค016**. กรุงเทพฯ: ภูมิบัณฑิต.



ภาคผนวก

เกณฑ์การให้คะแนน

เกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียน

แบบทดสอบละ 10 ข้อ ให้คะแนนข้อละ 1 คะแนน ตามรายละเอียด ดังนี้

คะแนน	รายละเอียด
1	หมายถึง เลือกข้อคำตอบได้ถูกต้อง
0	หมายถึง เลือกข้อคำตอบไม่ถูกต้อง

เกณฑ์การให้คะแนนแบบฝึกที่ 6.1

ข้อที่ 1 และ 2 มีข้อละ 5 ข้อย่อย ให้คะแนนข้อย่อยละ 3 คะแนน
ตามรายละเอียด ดังนี้

คะแนน	รายละเอียด
3	หมายถึง คำตอบถูกต้อง แสดงการคำนวณได้ถูกต้อง แนวคิดชัดเจน
2	หมายถึง คำตอบถูกต้อง แสดงการคำนวณผิดพลาดเล็กน้อย
1	หมายถึง แสดงการคำนวณเล็กน้อย หรือการคำนวณผิดพลาด
0	หมายถึง ไม่แสดงวิธีคำนวณ ไม่ได้คำตอบ หรือตอบไม่ถูก

รวมคะแนนเต็ม 30 คะแนน

เกณฑ์การให้คะแนนแบบฝึกที่ 6.2

ข้อที่ 1 - 5 ให้คะแนนข้อละ 3 คะแนน

ตามรายละเอียด ดังนี้

คะแนน	รายละเอียด
3	หมายถึง คำตอบถูกต้อง แสดงการคำนวณได้ถูกต้อง แนวคิดชัดเจน
2	หมายถึง คำตอบถูกต้อง แสดงการคำนวณผิดพลาดเล็กน้อย
1	หมายถึง แสดงการคำนวณเล็กน้อย หรือการคำนวณผิดพลาด
0	หมายถึง ไม่แสดงวิธีคำนวณ ไม่ได้คำตอบ หรือตอบไม่ถูก

รวมคะแนนเต็ม 15 คะแนน

เกณฑ์การให้คะแนนแบบฝึกที่ 6.3

ข้อที่ 1 มี 5 ข้อย่อย ให้คะแนนข้อละ 3 คะแนน

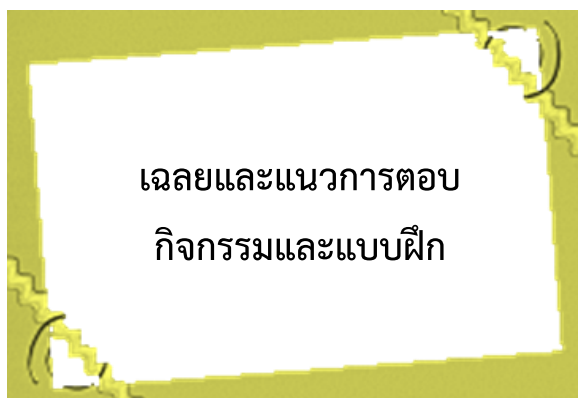
ข้อที่ 2 - 3 ให้คะแนนข้อละ 3 คะแนน

ข้อที่ 4 มี 2 ข้อย่อย ให้คะแนนข้อย่อยละ 3 คะแนน

ตามรายละเอียด ดังนี้

คะแนน	รายละเอียด
3	หมายถึง คำตอบถูกต้อง แสดงการคำนวณและเหตุผลได้ถูกต้อง แนวคิดชัดเจน
2	หมายถึง คำตอบถูกต้อง แสดงการคำนวณและเหตุผลผิดพลาดเล็กน้อย
1	หมายถึง แสดงการเหตุผลเล็กน้อย
0	หมายถึง ไม่ได้คำตอบ หรือตอบไม่ถูก

รวมคะแนนเต็ม 27 คะแนน



เฉลยและแนวการตอบกิจกรรมที่ 6.1



การกระจายทวินาม

สถานการณ์ที่ 1

ต้องการกระจายทวินาม $(a + b)^2$ ด้วยการคูณกันของ $(a + b)(a + b)$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = \dots aa + ab + ab + bb \dots$$

จำนวน a	จำนวน b	จำนวนวิธีจัดหมู่ ที่เลือก b	รูปแบบการจัดหมู่
2	0	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$	aa
1	1	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$	ab
0	2	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$	bb

สถานการณ์ที่ 2

ต้องการกระจายทวินาม $(a + b)^3$ ด้วยการคูณกันของ $(a + b)(a + b)(a + b)$

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = \dots \text{aaa} + \text{aab} + \text{abb} + \text{bbb} \dots$$

จำนวน a	จำนวน b	จำนวนวิธีจัดหมู่ ที่เลือก b	รูปแบบการจัดหมู่
3	0	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$	aaa
2	1	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$	aab
1	2	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$	abb
0	3	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$	bbb

สถานการณ์ที่ 3

ต้องการกระจายทวินาม $(a + b)^4$ ด้วยการคูณกันของ $(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b) = aaaa + aaab + aabb + abbb + bbbb$$

จำนวน a	จำนวน b	จำนวนวิธีจัดหมู่ ที่เลือก b	รูปแบบการจัดหมู่
4	0	$\binom{4}{0} = 1$	aaaa
3	1	$\binom{4}{1} = 4$	aaab
2	2	$\binom{4}{2} = 6$	aabb
1	3	$\binom{4}{3} = 4$	abbb
0	4	$\binom{4}{4} = 1$	bbbb

เฉลยและแนวการตอบแบบฝึกที่ 6.1

1. จงใช้ทฤษฎีบททวินาม ในการกระจายทวินามต่อไปนี้

1.1 $(3p + 2)^4$

$$\begin{aligned}
 &= \binom{4}{0}(3p)^4(2)^0 + \binom{4}{1}(3p)^3(2)^1 + \binom{4}{2}(3p)^2(2)^2 + \binom{4}{3}(3p)^1(2)^3 + \binom{4}{4}(3p)^0(2)^4 \\
 &= (1)(3p)^4(2)^0 + (4)(3p)^3(2)^1 + (6)(3p)^2(2)^2 + (4)(3p)^1(2)^3 + (1)(3p)^0(2)^4 \\
 &= 81p^4 + 216p^3 + 216p^2 + 96p + 16
 \end{aligned}$$

1.2 $(3 - g)^6$

$$\begin{aligned}
 &= \binom{6}{0}(3)^6(-g)^0 + \binom{6}{1}(3)^5(-g)^1 + \binom{6}{2}(3)^4(-g)^2 + \binom{6}{3}(3)^3(-g)^3 + \binom{6}{4}(3)^2(-g)^4 + \\
 &\quad \binom{6}{5}(3)^1(-g)^5 + \binom{6}{6}(3)^0(-g)^6 \\
 &= (1)(3)^6(-g)^0 + (6)(3)^5(-g)^1 + (15)(3)^4(-g)^2 + (20)(3)^3(-g)^3 + (15)(3)^2(-g)^4 + (6)(3)^1(-g)^5 + (1)(3)^0(-g)^6 \\
 &= 729 - 1458g + 1215g^2 - 540g^3 + 135g^4 - 18g^5 + g^6
 \end{aligned}$$

1.3 $(5k - 2)^6$

$$\begin{aligned}
 &= \binom{6}{0}(5k)^6(-2)^0 + \binom{6}{1}(5k)^5(-2)^1 + \binom{6}{2}(5k)^4(-2)^2 + \binom{6}{3}(5k)^3(-2)^3 + \binom{6}{4}(5k)^2(-2)^4 + \\
 &\quad \binom{6}{5}(5k)^1(-2)^5 + \binom{6}{6}(5k)^0(-2)^6 \\
 &= (1)(5k)^6(-2)^0 + (6)(5k)^5(-2)^1 + (15)(5k)^4(-2)^2 + (20)(5k)^3(-2)^3 + (15)(5k)^2(-2)^4 + \\
 &\quad (6)(5k)^1(-2)^5 + (1)(5k)^0(-2)^6 \\
 &= 15,625k^6 - 37,500k^5 + 37,500k^4 - 20,000k^3 + 6,000k^2 - 960k + 64
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.4 \quad & \left(2x - \frac{1}{x} \right)^4 \\
 &= \binom{4}{0} (2x)^4 + \binom{4}{1} (2x)^3 \left(-\frac{1}{x} \right)^1 + \binom{4}{2} (2x)^2 \left(-\frac{1}{x} \right)^2 + \binom{4}{3} (2x)^1 \left(-\frac{1}{x} \right)^3 + \binom{4}{4} \left(-\frac{1}{x} \right)^4 \\
 &= (1)(16x^4) + (4)(8x^3) \left(-\frac{1}{x} \right) + (6)(4x^2) \left(\frac{1}{x^2} \right) + (4)(2x) \left(-\frac{1}{x^3} \right) + (1) \left(\frac{1}{x^4} \right) \\
 &= 16x^4 - 32x^2 + 24x - 8x^{-2} + x^{-4} \\
 &= 16x^4 - 32x^2 + 24x - \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.5 \quad & \left(x - \frac{1}{x} \right)^6 \\
 &= \binom{6}{0} x^6 - \binom{6}{1} x^5 \left(\frac{1}{x} \right) + \binom{6}{2} x^4 \left(\frac{1}{x^2} \right) - \binom{6}{3} x^3 \left(\frac{1}{x^3} \right) + \binom{6}{4} x^2 \left(\frac{1}{x^4} \right) - \binom{6}{5} x \left(\frac{1}{x^5} \right) + \frac{1}{x^6} \\
 &= (1)x^6 - (6)x^5 \left(\frac{1}{x} \right) + (15)x^4 \left(\frac{1}{x^2} \right) - (20)x^3 \left(\frac{1}{x^3} \right) + (15)x^2 \left(\frac{1}{x^4} \right) - (6)x \left(\frac{1}{x^5} \right) + (1) \frac{1}{x^6} \\
 &= x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}
 \end{aligned}$$

2. จงหาค่าต่อไปนี้โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม และให้ตอบทศนิยมไม่เกิน 4 ตำแหน่ง

2.1 $(0.93)^5$

$$= (1 - 0.07)^5$$

$$= 1^5 + \binom{5}{1}(1^4)(-0.07) + \binom{5}{2}(1^3)(-0.07)^2 + \binom{5}{3}(1^2)(-0.07)^3 + \binom{5}{4}(1^1)(-0.07)^4 + \binom{5}{5}(1^0)(-0.07)^5$$

$$= 1 + (5)(-0.07) + (10)(0.0049) + (10)(-0.000343) + (5)(0.00002401) + (-0.0000016807)$$

$$= 1 - 0.35 + 0.049 - 0.00343 + 0.00012005 - 0.0000016807$$

$$= 0.6956$$

2.2 $(1.02)^5$

$$= (1+0.02)^5$$

$$= 1^5 + \binom{5}{1}(1^4)(0.02) + \binom{5}{2}(1^3)(0.02)^2 + \binom{5}{3}(1^2)(0.02)^3 + \binom{5}{4}(1^1)(0.02)^4 + \binom{5}{5}(1^0)(0.02)^5$$

$$= 1^5 + (5)(1^4)(0.02) + (10)(1^3)(0.02)^2 + (10)(1^2)(0.02)^3 + (5)(1^1)(0.02)^4 + (1)(1^0)(0.02)^5$$

$$= 1 + 0.1 + 0.004 + 0.0008 + 0.0000008$$

$$= 1.1040808$$

2.3 $(3.02)^4$

$$= (3+0.02)^4$$

$$= \binom{4}{0}(3)^4(0.02)^0 + \binom{4}{1}(3)^3(0.02)^1 + \binom{4}{2}(3)^2(0.02)^2 + \binom{4}{3}(3)^1(0.02)^3 + \binom{4}{4}(3)^0(0.02)^4$$

$$= (1)(3)^4(0.02)^0 + (4)(3)^3(0.02)^1 + (6)(3)^2(0.02)^2 + (4)(3)^1(0.02)^3 + (1)(3)^0(0.02)^4$$

$$= (1)(3)^4 + (4)(0.54) + (6)(0.0036) + (4)(0.000024) + 0.00000016$$

$$= 81 + 2.16 + 0.0216 + 0.000096 + 0.00000016$$

$$= 83.1817$$

$$\begin{aligned}
 & 2.4 \quad (11)^5 \\
 &= (10 + 1)^5 \\
 &= \binom{5}{0}(10^5)(1^0) + \binom{5}{1}(10^4)(1^1) + \binom{5}{2}(10^3)(1^2) + \binom{5}{3}(10^2)(1^3) + \binom{5}{4}(10^1)(1^4) + \binom{5}{5}(10^0)(1^5) \\
 &= 10^5 + (5)(10^4) + (10)(10^3) + (10)(10^2) + (5)(10) + 1 \\
 &= 100,000 + 50,000 + 10,000 + 1,000 + 50 + 1 \\
 &= 161,051
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2.5 \quad (102)^4 \\
 &= (100 + 2)^4 \\
 &= \binom{4}{0}(100^4)(2^0) + \binom{4}{1}(100^3)(2^1) + \binom{4}{2}(100^2)(2^2) + \binom{4}{3}(100^1)(2^3) + \binom{4}{4}(100^0)(2^4) \\
 &= 100^4 + (4)(100^3)(2) + (6)(100^2)(4) + (4)(100^1)(8) + (1)(16) \\
 &= 100,000,000 + 8,000,000 + 240,000 + 3,200 + 16 \\
 &= 108,243,216
 \end{aligned}$$

เฉลยและแนวการตอบกิจกรรมที่ 6.2



สัมประสิทธิ์ทวินาม

พิจารณาพจน์ต่าง ๆ ของการกระจาย $(a + b)^n$ จาก

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

พบว่า

$$\begin{aligned} \text{พจน์ที่ 1 คือ } & \binom{n}{0}a^n \\ \text{พจน์ที่ 2 คือ } & \binom{n}{1}a^{n-1}b \\ \text{พจน์ที่ 3 คือ } & \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 \\ & \vdots \\ \text{พจน์ที่ } r+1 \text{ คือ } & \binom{n}{r}a^{n-r}b^r \\ & \vdots \\ \text{พจน์ที่ } n \text{ คือ } & \binom{n}{n}b^n \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\text{พจน์ที่ } r+1 \text{ คือ } \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$



เฉลยและแนวการตอบแบบฝึกที่ 6.2

1. จงหาพจน์ที่ 5 ของการกระจาย $(x + y)^{10}$

วิธีทำ พจน์ที่ $r + 1$ คือ $T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

ดังนั้น พจน์ที่ 5 ของการกระจาย $(x + y)^{10}$ คือ

$$\begin{aligned} T_5 &= T_{4+1} = \binom{10}{4} (x)^{10-4} (y)^4 \\ &= \frac{10!}{(10-4)!4!} (x)^6 (y)^4 \\ &= 210x^6y^4 \end{aligned}$$

นั่นคือ พจน์ที่ 5 ของการกระจาย $(x + y)^{10}$ คือ $210x^6y^4$

2. จงหาพจน์ที่ 6 ของการกระจาย $(2x - 3y)^{12}$

วิธีทำ พจน์ที่ $r + 1$ คือ $T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

ดังนั้น พจน์ที่ 6 ของการกระจาย $(2x - 3y)^{12}$ คือ

$$\begin{aligned} T_6 &= T_{5+1} = \binom{12}{5} (2x)^{12-5} (-3y)^5 \\ &= \frac{12!}{(12-5)!5!} (2x)^7 (-3y)^5 \\ &= 792(128)x^7 (-243)y^5 \\ &= -24,634,368x^7y^5 \end{aligned}$$

นั่นคือ พจน์ที่ 6 ของการกระจาย $(2x - 3y)^{12}$ คือ $-24,634,368x^7y^5$

3. จงหาพจน์กลาง ของการกระจาย $(3x + y)^8$

วิธีทำ เนื่องจาก $(3x + y)^8$ มี $n = 8$ ดังนั้นการกระจายทวินามนี้จะมี 9 พจน์
พจน์กลางคือพจน์ที่ 5

$$\text{พจน์ที่ } r + 1 \text{ คือ } T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

ดังนั้น พจน์ที่ 5 ของการกระจาย $(3x + y)^8$ คือ

$$\begin{aligned} T_5 &= T_{4+1} = \binom{8}{4} (3x)^{8-4} (y)^4 \\ &= \frac{8!}{(8-4)!4!} (3x)^4 (y)^4 \\ &= 70(81)x^4 y^4 \\ &= 5,670x^4 y^4 \end{aligned}$$

นั่นคือ พจน์ที่ 5 ของการกระจาย $(3x + y)^8$ คือ $5,670x^4 y^4$

4. จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีตัวแปร $x^4 y^5$ ของการกระจาย $(2x - 2y)^9$

วิธีทำ จากทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่มี $x^4 y^5$ ของ $(2x - 2y)^9$ คือ

$$\begin{aligned} \binom{9}{5} (2x)^4 (-2y)^5 &= \frac{9!}{(9-5)!5!} (2x)^4 (-2y)^5 \\ &= 126(2x)^4 (-2y)^5 \\ &= 126(2)^4 (-2)^5 x^4 y^5 \\ &= -64,512x^4 y^5 \end{aligned}$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ $x^4 y^5$ ของ $(2x - 2y)^9$ คือ -64,512

5. จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ไม่มีตัวแปร x ของการกระจาย $\left(x + \frac{3}{x^3}\right)^8$

วิธีทำ

พจน์ที่ไม่มี x คือพจน์ที่มี x^0

สมมติให้พจน์ที่มี x^0 เป็นพจน์ที่ $r + 1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า} \quad T_{r+1} &= \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \\ &= \binom{8}{r} (x)^{8-r} \left(\frac{3}{x^3}\right)^r \\ &= \binom{8}{r} x^{8-r} (3)^r x^{-3r} \\ &= \binom{8}{r} x^{8-4r} (3)^r \end{aligned}$$

โจทย์กำหนดว่าพจน์ที่ไม่มี x คือพจน์ที่มี x^0

$$\text{นั่นแสดงว่า } 8 - 4r = 0$$

$$8 = 4r$$

$$\frac{8}{4} = r$$

$$2 = r$$

$$r = 2$$

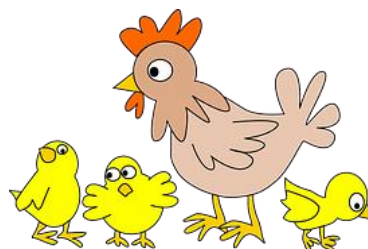
พจน์ที่ไม่มี x คือพจน์ที่ $2 + 1$ คือพจน์ 3

เฉลยและแนวการตอบกิจกรรมที่ 6.3



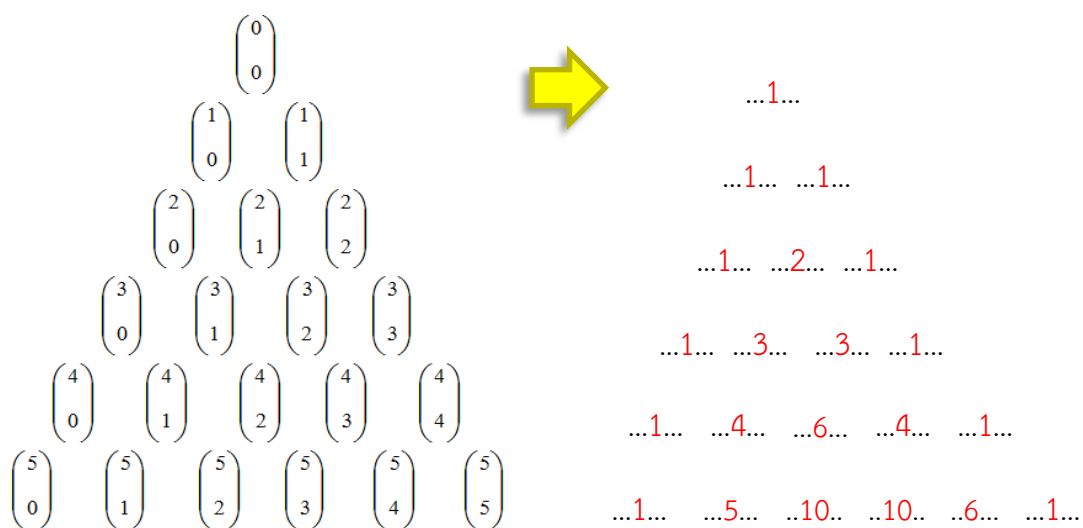
สามเหลี่ยมปาสคาล

				1					
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		1	
	1		4		6		4		1
1		5		10		10		5	1
...1...	...6...	...15...	...20...	...15...	...6...	...1...			
...1...	...7...	...21...	...35...	...35...	...21...	...7...	...1...		
...1...	...8...	...28...	...56...	...70...	...56...	...28...	...8...	...1...	





สามเหลี่ยมปาสคาล กับสัมประสิทธิ์ทวินาม



เฉลยและแนวการตอบแบบฝึกที่ 6.3

จงใช้สามเหลี่ยมปาสคาลในการกระจายทวินามต่อไปนี้

1. $(2x + 3)^5$

$$= (1)(2x)^5(3)^0 + (5)(2x)^4(3)^1 + (10)(2x)^3(3)^2 + (10)(2x)^2(3)^3 + (5)(2x)^1(3)^4 + (1)(2x)^0(3)^5$$

$$= 32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1,080x^2 + 810x + 243$$

2. $(2p - 1)^7$

$$= (1)(2p)^7(1)^0 - (7)(2p)^6(1)^1 + (21)(2p)^5(1)^2 - (35)(2p)^4(1)^3 + (35)(2p)^3(1)^4 - (21)(2p)^2(1)^5 + (7)(2p)(1)^6 - (1)(2p)^0(1)^7$$

$$= 128p^7 - 448p^6 + 672p^5 - 560p^4 + 280p^3 - 84p^2 + 14p - 1$$

3. $(f^2 + 2)^7$

$$= (1)(f^2)^7(2)^0 + (7)(f^2)^6(2)^1 + (21)(f^2)^5(2)^2 + (35)(f^2)^4(2)^3 + (35)(f^2)^3(2)^4 + (21)(f^2)^2(2)^5 + (7)(f^2)^1(2)^6 + (1)(f^2)^0(2)^7$$

$$= f^{14} + 14f^{12} + 84f^{10} + 280f^8 + 560f^6 + 672f^4 + 448f^2 + 128$$

4. $\left(d - \frac{1}{2}\right)^8$

$$= (1)d^8 - (8)d^7\left(\frac{1}{2}\right) + (28)d^6\left(\frac{1}{4}\right) - (56)d^5\left(\frac{1}{8}\right) + (70)d^4\left(\frac{1}{16}\right) - (56)d^3\left(\frac{1}{32}\right) + (28)d^2\left(\frac{1}{64}\right) - (8)d\left(\frac{1}{128}\right) + (1)\left(\frac{1}{256}\right)$$

$$= d^8 - 4d^7 + 7d^6 - 7d^5 + \frac{35d^4}{8} - \frac{7d^3}{4} + \frac{7d^2}{16} - \frac{d}{64} + \frac{1}{256}$$

5. $(2 - m)^{10}$

$$= (1)(2^{10}) - (10)(2^9)m + (45)(2^8)m^2 - (120)(2^7)m^3 + (210)(2^6)m^4 - (252)(2^5)m^5$$

$$+ (210)(2^4)m^6 - (120)(2^3)m^7 + (45)(2^2)m^8 - (10)(2^1)m^9 + (1)(2^0)m^{10}$$

$$= 1,024 - 5,120m + 11,520m^2 - 15,360m^3 + 13,440m^4 - 8,064m^5 + 3,360m^6 - 960m^7$$

$$+ 180m^8 - 20m^9 + m^{10}$$

2. จากความรู้ในเรื่องสามเหลี่ยมปาสคาล “จำนวนแรกและจำนวนสุดท้ายในแต่ละแถวเป็นเลข 1 ส่วนจำนวนอื่น ๆ ได้จากผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่อยู่เหนือจำนวนนั้น”

ถ้ากำหนดให้ จำนวนในรูปสามเหลี่ยมปาสคาลเป็นลำดับชนิดหนึ่ง โดยที่ n เป็นจำนวนพจน์ในแต่ละแถว และ r เป็นพจน์ที่เราสนใจ ซึ่งเกิดจากผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่อยู่เหนือจำนวนนั้น จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับนี้ (ประโยคที่ขีดเส้นใต้) ในรูปของ $\binom{n}{r}$ ที่สอดคล้องกับจำนวนในรูปสามเหลี่ยมปาสคาล

ดังนั้น ถ้าพิจารณา แถวที่ n

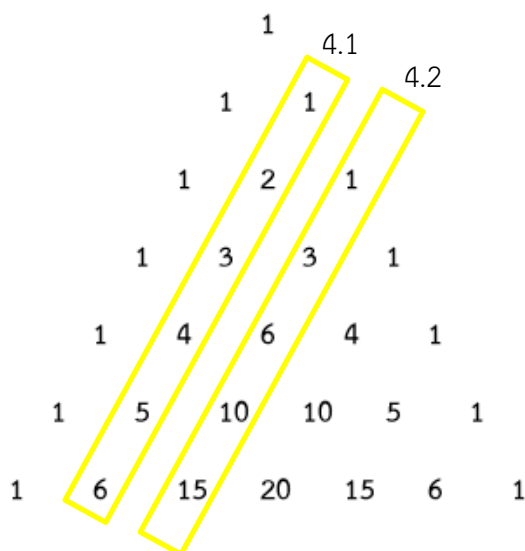
พบว่า $n = n$ เลือก $r = r$ ซึ่งเป็นตำแหน่งของ $\binom{n}{r}$

$$\binom{n}{r} \text{ เกิดจาก } \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

3. จงหาผลบวกของจำนวนทุกจำนวนในแถวที่ n ของสามเหลี่ยมปาสคาล และพจน์ทั่วไปของผลบวกในแต่ละแถวนี้ด้วย

1							ผลบวกแถวที่ 1 เท่ากับ 1				
	1	1					ผลบวกแถวที่ 2 เท่ากับ 2				
		1	2	1			ผลบวกแถวที่ 3 เท่ากับ 4				
			1	3	3	1	ผลบวกแถวที่ 4 เท่ากับ 8				
				1	4	6	4	1	ผลบวกแถวที่ 5 เท่ากับ 16		
					1	5	10	10	5	1	ผลบวกแถวที่ 6 เท่ากับ 32
											ผลบวกแถวที่ n เท่ากับ 2^{n-1}

4. จากรูปสามเหลี่ยมปาสคาล เมื่อกำหนดให้เป็นแบบรูปของลำดับชนิดหนึ่ง จงหาพจน์ทั่วไปของจำนวนในรูปสามเหลี่ยมปาสคาล ในกรอบสี่เหลี่ยมที่กำหนด



- 4.1 เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี พจน์ที่ 1 เท่ากับ 1 และผลต่างร่วมเท่ากับ 1
 ดังนั้น พจน์ทั่วไปคือ $1 + n$ หรือ $n + 1$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- 4.2 เป็นลำดับซึ่งมี พจน์ที่ 1 เท่ากับ 1 $= 2^1 - 1$
 พจน์ที่ 2 เกิดจาก พจน์ที่ 1 บวกด้วย 2 ได้เท่ากับ 3 $= 2^2 - 1$
 พจน์ที่ 3 เกิดจาก พจน์ที่ 2 บวกด้วย 3 ได้เท่ากับ 6 $= 2^3 - 1$
 พจน์ที่ 4 เกิดจาก พจน์ที่ 3 บวกด้วย 4 ได้เท่ากับ 10 $= 2^4 - 1$
 ดังนั้น พจน์ที่ n $= 2^n - 1$

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน
เรื่อง ทฤษฎีบททวินาม

ข้อที่	ก	ข	ค	ง	จ
1	✗				
2		✗			
3	✗				
4		✗			
5			✗		
6					✗
7				✗	
8			✗		
9					✗
10				✗	

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน
เรื่อง ทฤษฎีบททวินาม

ข้อที่	ก	ข	ค	ง	จ
1		✗			
2	✗				
3		✗			
4	✗				
5					✗
6				✗	
7			✗		
8					✗
9			✗		
10				✗	