



ชื่อ-สกุล

ชั้น เลขที่



แบบทดสอบก่อนเรียน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 (ค32204)
เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

คำชี้แจง แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

คำสั่ง ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย ✕ ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกต้องที่สุด
เพียงคำตอบเดียว

- นักเรียนชาย 3 คน และนักเรียนหญิง 2 ต้องการนั่งเป็นแนวตรง จะมีวิธีการนั่งได้กี่วิธี
ถ้านักเรียนหญิงทั้งสองคนต้องนั่งติดกัน
 - 24 วิธี
 - 48 วิธี
 - 60 วิธี
 - 72 วิธี
 - 98 วิธี
- เลือกนักเรียน 3 คน จากนักเรียนทั้งหมด 20 คน มาเป็นหัวหน้าห้อง รองหัวหน้าห้อง
และเลขานุการ ได้ทั้งหมดกี่วิธี
 - 4,840 วิธี
 - 5,840 วิธี
 - 6,840 วิธี
 - 7,840 วิธี
 - 8,840 วิธี
- มีชาย 5 คน หญิง 6 คน มายืนเรียงแถวยาว จะมีวิธีการยืนได้กี่วิธี ถ้าไม่มีชาย 2 คนใดยืนติดกัน
 - 1,514,400 วิธี
 - 1,614,400 วิธี
 - 1,714,400 วิธี
 - 1,814,400 วิธี
 - 1,914,400 วิธี

กระดาษคำตอบ แบบทดสอบก่อนเรียน
เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น

ข้อที่	ก	ข	ค	ง	จ
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					



วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น (linear permutation) เป็นการจัดเรียงสิ่งของ โดยคำนึงถึงตำแหน่งของสิ่งของแต่ละสิ่งเป็นสำคัญ เช่น การเรียงแถวของนักเรียนที่คำนึงถึงลำดับที่รหัสประจำตัวของนักเรียนที่ใช้เลขโดด 0–9 มาเรียงเป็นจำนวน 4 หลัก เป็นต้น ซึ่งการคำนวณหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการเรียงสับเปลี่ยน อาจต้องใช้ความรู้ในเรื่องกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับมาใช้ในการคำนวณด้วย

ตัวอย่าง คำว่า ONE มีตัวอักษร 3 ตัว ถ้านำมาจัดเรียงเป็นคำใหม่ โดยไม่คำนึงถึงความหมาย จะจัดเรียงในตำแหน่งที่ 1 ตำแหน่งที่ 2 และ ตำแหน่งที่ 3 ได้ดังนี้

ONE OEN EON ENO NOE NEO จะพบว่าเรียงสับเปลี่ยนได้ 6 วิธี

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น ที่นำเสนอในเอกสารประกอบการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 เรื่องความน่าจะเป็น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่มที่ 3 วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น จะนำเสนอ 2 ตอน ประกอบด้วย

ตอนที่ 1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

ตอนที่ 2 วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด



ตอนที่ 1
วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น
ของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด



วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด หมายถึง การนำสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด มาเรียงในแนวตรง โดยคำนึงถึงลำดับ หรือตำแหน่งที่ของสิ่งของนั้น ๆ เราจะศึกษาความสัมพันธ์เพื่อหาจำนวนวิธีของวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น



มาศึกษาตอนที่ 1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด ได้เลยนะคะ



ตอนที่ 1

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด หมายถึง การนำสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด มาเรียงสับเปลี่ยนในแนวนตรง โดยคำนึงถึงตำแหน่ง หรือลำดับที่ ของการจัดเรียงสิ่งของนั้น ๆ เป็นสำคัญ



วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

มีลูกบอล 2 สี คือสีแดง และสีเขียว นำมาเรียงในแนวนตรง และคำนึงลำดับที่ จะเรียงสลับที่ได้

2 วิธีคือ



วิธีที่ 1



วิธีที่ 2

ถ้ามีลูกบอล 3 สี คือ สีแดง สีเขียว และสีน้ำเงิน นำมาวางเรียงในแนวนตรงและคำนึงถึงลำดับที่ ก็จะมีวิธีการเรียงได้แตกต่างกันดังนี้



วิธีที่ 1



วิธีที่ 2



วิธีที่ 3



วิธีที่ 4



วิธีที่ 5



วิธีที่ 6

นั่นคือถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน 3 สิ่ง นำมาวางเรียงในแนวนตรง โดยคำนึงถึงลำดับที่จะสามารถเรียงได้ในตำแหน่งต่าง ๆ เท่ากับ 6 วิธี



ในบางกรณีเราอาจไม่ต้องการนำสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง มาเรียงสับเปลี่ยนพร้อมกันทั้งหมด นั่นคือ เรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง โดยนำมาเรียงคราวละ r สิ่ง เมื่อ $1 \leq r \leq n$ พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ถ้ามีลูกบอล 3 ลูก คือ สีแดง สีเขียว และสีน้ำเงิน  นำมาวางเรียงในแนวตรง และคำนึงถึงลำดับที่ คราวละ 2 ลูก จะมีวิธีการเรียงได้แตกต่างกันดังนี้



วิธีที่ 1



วิธีที่ 2



วิธีที่ 3



วิธีที่ 4



วิธีที่ 5



วิธีที่ 6

นั่นคือถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน 3 สิ่ง นำมาวางเรียงในแนวตรง คราวละ 2 สิ่ง โดยคำนึงถึงลำดับที่ จะสามารถเรียงได้ในตำแหน่งต่าง ๆ กันอธิบายโดยหลักการคูณ ได้ดังนี้

ตำแหน่งที่	1	2
จำนวนวิธี	3 วิธี	2 วิธี

ดังนั้น โดยหลักการคูณ วิธีเรียงสิ่งของที่แตกต่างกัน 3 สิ่ง นำมาจัดเรียง 2 สิ่งนี้ได้เท่ากับ $3 \times 2 = 6$ วิธี

เรามาทหาคือสรุปเกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n จากกิจกรรมต่อไปนี้



กิจกรรมที่ 3.1

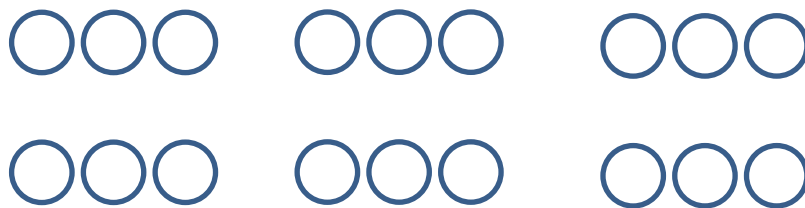
วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

จุดประสงค์การเรียนรู้ : แก้ไขปัญหาในเรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดได้

- คำสั่ง**
1. ให้นักเรียนเขียนแสดงวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกัน จากสถานการณ์ที่กำหนด เพื่อหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างกันทั้งหมด
 2. จากจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นทั้งหมดที่ได้ ให้หาความสัมพันธ์ในรูปแฟกทอเรียลกับจำนวนสิ่งของทั้งหมดในแต่ละสถานการณ์

สถานการณ์ที่ 1

ลูกบอลที่มีหมายเลขกำกับ จำนวน 3 ลูก



จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน วิธี

จากจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน เขียนในรูปแฟกทอเรียลที่สัมพันธ์กับจำนวนของสิ่งของได้เป็น

..... วิธี



สถานการณ์ที่ 2

สลากหมายเลข

1	2	3	4
---	---	---	---

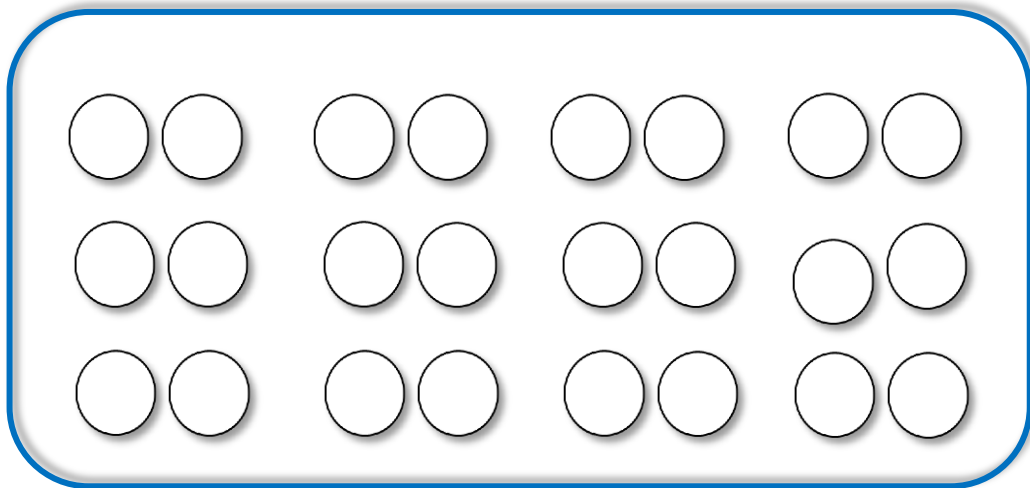
จัดเรียงได้ทั้งหมด จำนวน

จากจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน เขียนในรูปแฟกทอเรียลที่สัมพันธ์กับจำนวนสิ่งของได้เป็น
..... วิธี



สถานการณ์ที่ 3

ลูกบอลสีต่างกัน 4 สี คือสีฟ้า สีส้ม สีม่วงและสีเขียว
ต้องการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น คราวละ 2 ลูก



มีวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดวิธี

พิจารณาจากหลักการคูณ ดังนี้

ตำแหน่งที่ 1 มีสิ่งของที่จะนำมาเรียงสับเปลี่ยนได้ สิ่ง
ตำแหน่งที่ 2 มีสิ่งของที่จะนำมาเรียงสับเปลี่ยนได้ สิ่ง

ดังนั้น จากจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน เขียนในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น

.....วิธี



สถานการณ์ที่ 4

มีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง นำมาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นคราวละ r สิ่ง

จงเขียนจำนวนเพื่ออธิบายจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง คราวละ r สิ่ง เมื่อ $1 \leq r \leq n$ โดยใช้หลักการคูณ

มีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่งนำมาเรียงสับเปลี่ยนคราวละ r สิ่ง

ตำแหน่งที่ 1

มีสิ่งของ n สิ่ง

เรียงสับเปลี่ยนได้.....วิธี

ตำแหน่งที่ 2

มีสิ่งของ $n-1$ สิ่ง

เรียงสับเปลี่ยนได้.....วิธี

ตำแหน่งที่ 3

มีสิ่งของ $n-2$ สิ่ง

เรียงสับเปลี่ยนได้.....วิธี

⋮

ตำแหน่งที่ r

มีสิ่งของ.....สิ่ง

เรียงสับเปลี่ยนได้.....วิธี

มีวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดวิธี

จากจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน เขียนในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น

..... วิธี



จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด



ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง นำมาจัดเรียงโดยคำนึงถึงลำดับที่ หรือตำแหน่งที่สำคัญ โดยนำมาจัดเรียงพร้อมกันทั้งหมด n สิ่ง จะมีจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน โดยพิจารณา ดังนี้

ตำแหน่งที่ 1	มีสิ่งของ n สิ่ง	เรียงสับเปลี่ยนได้	n วิธี
ตำแหน่งที่ 2	มีสิ่งของ $n - 1$ สิ่ง	เรียงสับเปลี่ยนได้	$n - 1$ วิธี
ตำแหน่งที่ 3	มีสิ่งของ $n - 2$ สิ่ง	เรียงสับเปลี่ยนได้	$n - 2$ วิธี
ตำแหน่งที่ 4	มีสิ่งของ $n - 3$ สิ่ง	เรียงสับเปลี่ยนได้	$n - 3$ วิธี
$\vdots$			
ตำแหน่งที่ n	มีสิ่งของ $n - (n - 1)$ สิ่ง	เรียงสับเปลี่ยนได้	$n - (n - 1) = 1$ วิธี

โดยหลักการคูณ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง นำมาเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด n สิ่ง เท่ากับ $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \dots \times 1 = n!$ วิธี

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่ง
ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดเรียงทั้งหมด n สิ่ง
พร้อมกันทั้งหมด เท่ากับ $n!$ วิธี



จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง
 คราวละ r สิ่ง โดยที่ $1 \leq r \leq n$



วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง โดยนำมาเรียงคราวละ r สิ่ง โดยที่ $1 \leq r \leq n$ สามารถสรุปวิธีการคำนวณหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นทั้งหมด โดยใช้ความรู้ในเรื่องกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ ในเรื่องหลักการคูณของการจัดเรียงสิ่งของที่แตกต่างกันในตำแหน่งต่าง ๆ ดังนี้

ตำแหน่งที่	1	2	3	4	...	r
จำนวนวิธี	n	$(n - 1)$	$(n - 2)$	$(n - 3)$	...	$n - (r - 1)$

เนื่องจากการทำงานทั้งหมดต่อเนื่องกัน จากการหลักการคูณ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \text{จำนวนวิธีทั้งหมด} &= n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \dots \times (n - (r - 1)) \\
 &= \frac{n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \dots \times (n - (r - 1)) \times (n - r)!}{(n - r)!} \\
 &= \frac{n!}{(n - r)!} \quad \text{วิธี}
 \end{aligned}$$

การเขียนสัญลักษณ์

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง โดยจัดคราวละ r สิ่ง อาจเขียนแทนได้ในหลายแบบ เช่น เขียนแทนด้วย ${}_nP_r$, $P_{n,r}$ หรือ $P(n, r)$

สำหรับในที่นี้จะใช้ $P_{n,r}$

$$\text{โดยที่ } P_{n,r} = \frac{n!}{(n - r)!} \quad \text{เมื่อ } 1 \leq r \leq n$$

ดังนั้น วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกัน n นำมาเรียงทั้งหมด n สิ่ง
จึงอยู่ในกรณีนี้ด้วย โดยเขียนได้เป็น

$$P_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

ต่อไปเราจะมาศึกษาการนำข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ
ที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง โดยจัดคราวละ r สิ่ง ซึ่ง $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$
เมื่อ $1 \leq r \leq n$ จากตัวอย่างต่อไปนี้



ตัวอย่างที่ 3.1

ต้องการติดสติ๊กเกอร์รูปดอกไม้ที่แตกต่างกันจำนวน 5 แบบ เป็นแถวตรง
จะมีจำนวนวิธีในการติดสติ๊กเกอร์ได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ ต้องการติดสติ๊กเกอร์รูปดอกไม้ที่แตกต่างกันจำนวน 5 แบบ ในแนวตรง
จัดได้ 5 ตำแหน่ง

ตำแหน่งที่ 1	ตำแหน่งที่ 2	ตำแหน่งที่ 3	ตำแหน่งที่ 4	ตำแหน่งที่ 5
• จัดได้ 5 วิธี	• จัดได้ 4 วิธี	• จัดได้ 3 วิธี	• จัดได้ 2 วิธี	• จัดได้ 1 วิธี
				

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด เท่ากับ $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3.2

จำนวนคำที่เกิดจากการสลับที่ของตัวอักษรของคำว่า HISTORY มีทั้งหมดที่คำ เมื่อ

- 1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
- 2) พยัญชนะทุกตัวอยู่ติดกัน

วิธีทำ จำนวนคำที่เกิดจากการสลับที่ของตัวอักษรจากคำว่า HISTORY ซึ่งมีจำนวน 7 ตัว

- 1) นำมาเรียงสลับที่ทั้งหมด 7 ตัว เท่ากับ $7! = 5,040$ คำ
- 2) พยัญชนะทุกตัวต้องอยู่ติดกัน จากคำว่า HISTORY มีพยัญชนะจำนวน 5 ตัว สระจำนวน 2 ตัว ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะสลับที่ตัวอักษร จะพิจารณา 2 ขั้นตอน
 ขั้นตอนที่ 1 นำพยัญชนะทั้ง 5 ตัวมาเรียงติดกันกับสระอีก 2 ตัว
 รวมเป็น 3 ตำแหน่งสลับที่กันได้ $3!$ วิธี
 ขั้นตอนที่ 2 พยัญชนะทั้ง 5 ตัวสลับที่กันได้ $5!$ วิธี
 ดังนั้น จำนวนคำที่จะเกิดขึ้นเท่ากับ $3! \times 5! = 6 \times 120 = 720$ คำ

ตัวอย่างที่ 3.3

เขียนรายชื่อพนักงาน 15 คน ลงในสลาก รายชื่อละ 1 ใบ ใส่ลงในภาชนะ แล้วสุ่มหยิบสลากขึ้นมาคราวละหนึ่งใบ สองครั้ง เพื่อแจกรางวัลที่หนึ่งและรางวัลที่สองตามลำดับ จงหาจำนวนวิธีที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด

วิธีทำ ในการหยิบใบรายชื่อ 15 ใบที่แตกต่างกัน เพื่อให้ได้รางวัลที่ 1 และรางวัลที่ 2 แสดงว่าสนใจตำแหน่งในการเรียงสับเปลี่ยน นั่นคือ มีสิ่งของที่แตกต่างกัน 15 สิ่ง เลือกมาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น 2 สิ่ง จำนวนวิธีที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด คือ

$$\begin{aligned}
 P_{15, 2} &= \frac{15!}{(15 - 2)!} \\
 &= \frac{15!}{13!} \\
 &= \frac{15 \times 14 \times 13!}{13!} \\
 &= 210 \text{ วิธี}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น จะมีวิธีในการแจกรางวัลได้แตกต่างกันทั้งหมดเท่ากับ 210 วิธี

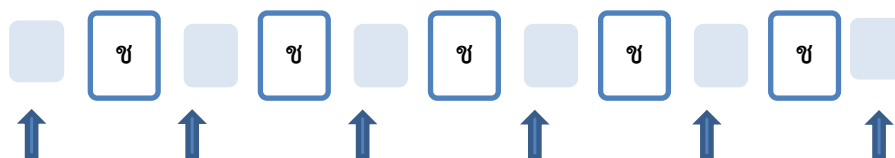
ตัวอย่างที่ 3.4

มีผู้ชาย 5 คน และผู้หญิง 3 คน ยืนเรียงเป็นแถวตรง จะมีการยืนทั้งหมดกี่วิธี เมื่อ

- 1) ไม่มีข้อกำหนดเพิ่มเติม
- 2) ผู้หญิงยืนแยกกัน
- 3) ผู้ชายยืนแยกกัน

วิธีทำ

- 1) ต้องการนำผู้ชาย 5 คน และผู้หญิง 3 คน มายืนเรียงเป็นแถวตรง เนื่องจากมีคนที่ทั้งหมด 8 คน ที่แตกต่างกัน ดังนั้น นำคนทั้ง 8 คน มาจัดเรียงเป็นแถวตรงได้ $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40,320$ วิธี
- 2) ต้องการนำผู้ชาย 5 คน และผู้หญิง 3 คน มายืนเรียงเป็นแถวตรง โดยที่ผู้หญิงต้องยืนแยกกัน ดังนั้น จะจัดเรียงให้ผู้ชายยืนก่อน จากนั้น จึงนำผู้หญิงมาแทรกระหว่างผู้ชาย ดังนี้



แบ่งงานออกเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เรียงผู้ชาย 5 คน ได้ $5! = 120$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 นำผู้หญิง 3 คน ไปเรียงในตำแหน่งสลับกับผู้ชาย

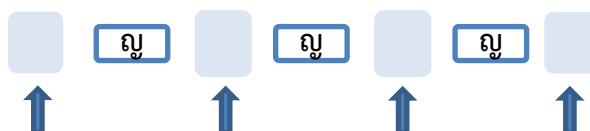
ซึ่งมี 6 ตำแหน่ง โดยหลักการคูณจึงจัดเรียงได้

$$6 \times 5 \times 4 = 14,400 \text{ วิธี}$$

เนื่องจากการทำงาน 2 ขั้นตอนต้องทำต่อเนื่องกัน ดังนั้นจำนวนวิธีการเรียง

สับเปลี่ยนทั้งหมด เท่ากับ $120 \times 120 = 14,400$ วิธี

- 3) ต้องการนำผู้ชาย 5 คน และผู้หญิง 3 คน มายืนเรียงเป็นแถวตรง โดยที่ผู้ชายต้องยืนแยกกัน ดังนั้น จะจัดเรียงให้ผู้หญิง 3 คน ยืนก่อน



จากรูปพบว่า มีตำแหน่งที่สามารถให้ผู้ชายยืนได้เพียง 4 ตำแหน่ง แต่มีผู้ชาย 5 คน ดังนั้น ความต้องการที่จะให้ผู้ชายยืนแยกกันทั้งหมด **จึงเป็นไปได้**

ตัวอย่างที่ 3.5

ต้องการสร้างจำนวนเต็มที่มี 6 หลัก จากเลขโดด 1, 2, 3, 4, 5 และ 6
จะสร้างได้กี่จำนวนที่แตกต่างกัน เมื่อ

- 1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
- 2) จำนวนดังกล่าวมีเลขคู่และเลขคี่สลับกันทีละหลัก
- 3) เป็นจำนวนที่ 5 หารไม่ลงตัว

วิธีทำ

1) ต้องการสร้างจำนวน 6 หลัก จากเลขโดด 1, 2, 3, 4, 5 และ 6
จะสร้างได้กี่จำนวนที่แตกต่างกัน $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ จำนวน

2) ต้องการสร้างจำนวน 6 หลัก จากเลขโดด 1, 2, 3, 4, 5 และ 6

เมื่อจำนวนดังกล่าวมีเลขคู่และเลขคี่สลับกันทีละหลัก

แบ่งงานออกเป็น 2 กรณี กรณีละ 2 ขั้นตอน ดังนี้

กรณีที่ 1 เลขคี่อยู่หัวแถว

ขั้นตอนที่ 1 เลขคี่เรียงสลับที่กันได้ $3! = 6$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลขคู่เรียงสลับที่กันได้ $3! = 6$ วิธี

โดยหลักการคูณจึงจัดเรียงได้ $6 \times 6 = 36$ วิธี

กรณีที่ 2 เลขคู่อยู่หัวแถว

ขั้นตอนที่ 1 เลขคู่เรียงสลับที่กันได้ $3! = 6$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลขคี่เรียงสลับที่กันได้ $3! = 6$ วิธี

โดยหลักการคูณจึงจัดเรียงได้ $6 \times 6 = 36$ วิธี

ดังนั้น จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จะสร้างจำนวน 6 หลักที่เลขคู่และเลขคี่
วางสลับกันทีละหลักได้ทั้งหมดเท่ากับ $36 + 36 = 72$ จำนวน

3) ต้องการสร้างจำนวน 6 หลัก จากเลขโดด 1, 2, 3, 4, 5 และ 6

โดยเป็นจำนวนที่ 5 หารไม่ลงตัว แสดงว่า หลักหน่วยต้องลงท้ายด้วย

1, 2, 3, 4 และ 6 ดังนั้นหลักหน่วยจะมีจำนวนวิธีสร้างได้ 5 วิธี

จะแบ่งการทำงานเป็น 2 ขั้นตอนคือ

ขั้นตอนที่ 1 หลักหน่วยเลือกตัวเลขได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ตัวเลขอีก 5 หลัก จัดเรียงได้ $5! = 120$ วิธี

เนื่องจากการทำงาน 2 ขั้นตอนต้องทำต่อเนื่องกัน

ดังนั้น จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด เท่ากับ $5 \times 120 = 600$ จำนวน

ตัวอย่างที่ 3.6

สวนสาธารณะแห่งหนึ่งมีเก้าอี้เรียงเป็นแถวยาว 10 ตัว พ่อ แม่ และลูกอีก 2 คน มาออกกำลังกายที่สวนสาธารณะแห่งนี้ แล้วต้องการนั่งพักบนเก้าอี้คนละ 1 ตัว จงหาจำนวนวิธีการนั่งของคนทั้ง 4 คนนี้ เมื่อ

- 1) ไม่มีเงื่อนไขใดเพิ่มเติม
- 2) ทั้ง 4 คนต้องนั่งติดกัน
- 3) ไม่มี 2 คนใดนั่งติดกัน

วิธีทำ 1) ต้องการจัดคน 4 คน นั่งเก้าอี้ 10 ตัว โดยไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

$$\begin{aligned}
 \text{จะจัดได้ทั้งหมด เท่ากับ } P_{10,4} &= \frac{10!}{(10-4)!} \\
 &= \frac{10!}{6!} \\
 &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} \\
 &= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \\
 &= 5,040 \text{ วิธี}
 \end{aligned}$$

2) ต้องการจัดคน 4 คน นั่งเก้าอี้ 10 ตัว โดยทั้ง 4 คนต้องนั่งติดกัน



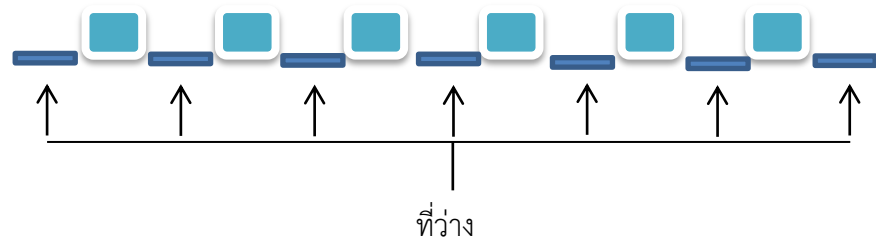
ดังนั้น จะแบ่งการทำงานได้ 2 ขั้นตอน คือ

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเก้าอี้ที่อยู่ติดกัน 4 ตัว จาก 10 ตัวได้ 7 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 คนทั้ง 4 คน สลับที่กันเองได้ $4! = 24$ วิธี

โดยหลักการคูณ จำนวนวิธีทั้งหมด เท่ากับ $7 \times 4! = 7 \times 24 = 168$ วิธี

- 3) ต้องการจัดคน 4 คน นั่งเก้าอี้ 10 ตัว โดยไม่มี 2 คนใดนั่งติดกัน
 นั่นคือ จากเก้าอี้ทั้งหมด 10 ตัว แบ่งเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนที่ใช้นั่ง 4 ตัว
 และส่วนที่เหลือ 6 ตัว ที่ไม่ใช้นั่ง จึงจัดวางเก้าอี้ทั้ง 6 ตัว นี้เป็นแถวตรง
 แล้วนำ เก้าอี้ 4 ตัวที่ต้องการนั่งมาแทรกที่ว่าง



จากรูปจะพบว่า มีที่ว่างให้เก้าอี้ทั้ง 4 ตัว แทรกได้ 7 ตำแหน่ง
 ดังนั้น จำนวนวิธีในการจัดที่นั่งเท่ากับ

$$P_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 840 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 3.7

เรือลำหนึ่งอับปางอยู่กลางทะเล จึงต้องส่งสัญญาณขอความช่วยเหลือ
 ด้วยการชักธงสีต่าง ๆ กัน ซึ่งมีธงทั้งหมด 5 สี ในการให้สัญญาณ
 แต่ละครั้งจะต้องใช้ธงอย่างน้อย 1 สี และธงจะถูกชักเรียงบนเชือก
 เส้นเดียวกันเป็นแนวตรง จงหาว่าเรือลำนี้จะส่งสัญญาณได้ทั้งหมดกี่สัญญาณ

วิธีทำ การส่งสัญญาณด้วยธง 5 สีที่ต่างกันทีละ 1, 2, 3, 4 และ 5 สี

นั่นคือ จะมีวิธีทั้งหมด เท่ากับ $P_{5,1} + P_{5,2} + P_{5,3} + P_{5,4} + P_{5,5}$ วิธี

$$\begin{aligned} P_{5,1} + P_{5,2} + P_{5,3} + P_{5,4} + P_{5,5} &= \frac{5!}{(5-1)!} + \frac{5!}{(5-2)!} + \frac{5!}{(5-3)!} + \frac{5!}{(5-4)!} + \frac{5!}{(5-5)!} \\ &= \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{1!} + \frac{5!}{0!} \\ &= 5 + 20 + 60 + 120 + 120 \\ &= 325 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

ดังนั้น การส่งสัญญาณด้วยธง 5 สีที่ต่างกันทีละ 1, 2, 3, 4 และ 5 สี
 ได้ทั้งหมด 325 สัญญาณ

ตัวอย่างที่ 3.8

ต้องการสร้างจำนวนเต็มที่มี 7 หลัก จากตัวเลข 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 และ 9 โดยที่แต่ละหลักไม่ซ้ำกัน จะสร้างจำนวนดังกล่าวได้กี่จำนวน เมื่อ

- 1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
- 2) หลักแรกและหลักสุดท้ายเท่านั้นที่เป็นเลขคู่
- 3) เลขคู่และเลขคี่เรียงสลับกันที่ละหลัก

วิธีทำ 1) ต้องการสร้างจำนวนเต็มที่มี 7 หลัก จากตัวเลข 1 – 9 แต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

$$\text{จะสร้างจำนวนได้ } P_{9,7} = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9!}{2!} = 181,440 \text{ จำนวน}$$

2) ต้องการสร้างจำนวนเต็มที่มี 7 หลัก จากตัวเลข 1 – 9 แต่ละหลักไม่ซ้ำกัน เมื่อหลักแรกและหลักสุดท้ายเท่านั้นที่เป็นจำนวนคู่

คู่						คู่
-----	--	--	--	--	--	-----

จะแบ่งขั้นตอนในการสร้างจำนวนเป็น 2 ขั้นตอน คือ

ขั้นตอนที่ 1 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของเลขคู่ 2 ตัว จาก 4 ตัว คือ 2, 4, 6 และ 8

$$\text{เท่ากับ } P_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12 \text{ วิธี}$$

ขั้นตอนที่ 2 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของเลขคี่ 5 ตัว จาก 5 ตัว คือ 1, 3, 5, 7 และ 9

$$\text{เท่ากับ } P_{5,5} = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = 120 \text{ วิธี}$$

ดังนั้น จำนวนของจำนวนเต็มที่มี 7 หลักที่มีหลักแรกและหลักสุดท้ายเท่านั้นที่เป็นจำนวนคู่เท่ากับ $12 \times 120 = 1,440$ จำนวน

- 3) ต้องการสร้างจำนวนเต็มที่มี 7 หลัก จากตัวเลข 1 – 9 แต่ละหลักไม่ซ้ำกัน
เมื่อเลขคู่และเลขคี่เรียงสลับกันทีละหลัก

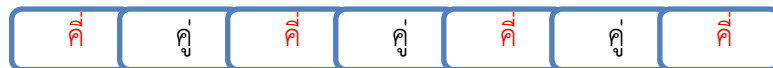
จะแบ่งขั้นตอนในการสร้างจำนวนเป็น 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 ให้หลักแรกเป็นเลขคู่ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของเลขคู่ 4 ตัว
จาก 4 ตัว และเลขคี่ 3 ตัว จาก 5 ตัว



$$\begin{aligned} \text{เท่ากับ } P_{4,4} \times P_{5,3} &= \left(\frac{4!}{(4-4)!} \right) \times \left(\frac{5!}{(5-3)!} \right) \\ &= \frac{4!}{0!} \times \frac{5!}{2!} \\ &= 24 \times 60 \\ &= 1,440 \text{ จำนวน} \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 ให้หลักแรกเป็นเลขคี่จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของเลขคี่ 4 ตัว
จาก 5 ตัว และเลขคู่ 3 ตัว จาก 4 ตัว

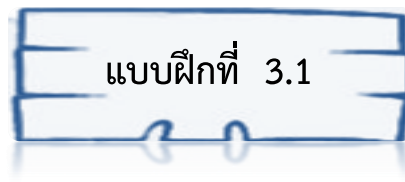


$$\begin{aligned} \text{เท่ากับ } P_{5,4} \times P_{4,3} &= \left(\frac{5!}{(5-4)!} \right) \times \left(\frac{4!}{(4-3)!} \right) \\ &= \frac{5!}{1!} \times \frac{4!}{1!} \\ &= 120 \times 24 \\ &= 2,880 \text{ จำนวน} \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนของจำนวนเต็มที่มี 7 หลักเมื่อเลขคู่และเลขคี่เรียงสลับกันทีละหลัก
เท่ากับ $1,440 + 2,880 = 4,320$ จำนวน

มาทดสอบความเข้าใจ
ด้วยการทำแบบฝึกที่ 3.1
นะคะ





จุดประสงค์การเรียนรู้ : แก้ไขปัญหาในเรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดได้

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำประกอบการหาคำตอบ ทุกข้อ

1. ถ้านำเลขโดด 1, 2, 3 และ 4 มาจัดเรียงเป็นจำนวนที่มี 4 หลัก แต่ละหลักไม่ซ้ำกัน จะจัดได้ทั้งหมดกี่จำนวน เมื่อ

1.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

1.2 เลขคู่จะต้องเรียงอยู่ติดกัน

วิธีทำ

1.1 วิธีจัดเรียงจำนวนที่มี 4 หลัก จากเลขโดด 1, 2, 3 และ 4 โดยไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

จำนวนที่จะสร้างได้ทั้งหมดเท่ากับ..... วิธี

1.2 วิธีจัดเรียงจำนวนที่มี 4 หลัก จากเลขโดด 1, 2, 3 และ 4

โดยกำหนดให้เลขคู่ต้องเรียงอยู่ติดกัน จะพิจารณาขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลขคู่ในที่นี่ประกอบด้วย 2 และ 4 นำมาเรียงติดกัน

จะสลับที่กันได้ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เสมือนว่าเลขโดดจะเหลือ 3 จำนวน

จึงเรียงเป็นจำนวนได้ วิธี

ดังนั้น จำนวนที่จะสร้างได้ทั้งหมดเท่ากับ..... วิธี



2. มีครู 1 คน นักเรียนชาย 4 คน และนักเรียนหญิง 4 คน ย้ายรูปหมู่เป็นแถวยาว
แถวเดียว จงหาจำนวนวิธีในการยืนเข้าแถว เมื่อ

2.1 ครูยืนตรงกลาง

2.2 นักเรียนชายยืนติดกันทั้งหมด

2.3 ครูยืนหัวแถวและนักเรียนหญิงยืนท้ายแถว

วิธีทำ 2.1 ต้องการเรียงสับเปลี่ยนแบบแถวตรงครู 1 คน นักเรียนชาย 4 คน และนักเรียนหญิง
4 คน โดยครูยืนตรงกลาง

.....

.....

.....

.....

.....

2.2 ต้องการเรียงสับเปลี่ยนแบบแถวตรงครู 1 คน นักเรียนชาย 4 คน
และนักเรียนหญิง 4 คน โดยนักเรียนชายยืนติดกันทั้งหมด

.....

.....

.....

.....

.....

2.3 ต้องการเรียงสับเปลี่ยนแบบแถวตรงครู 1 คน นักเรียนชาย 4 คน และนักเรียนหญิง
4 คน โดยครูยืนหัวแถวและนักเรียนหญิงยืนท้ายแถว

.....

.....

.....

.....

.....



3. ต้องการนำลูกบอล 4 สี ใส่กล่องทรงสี่เหลี่ยมซึ่งวางเป็นแถวตรงจำนวน 8 กล่องจงหาจำนวนวิธีที่ต่างกันในการนำลูกบอลใส่ในกล่อง เมื่อ

- 3.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
- 3.2 ลูกบอลทั้ง 4 ลูกใส่ในกล่องที่ติดกัน
- 3.3 ไม่มีลูกบอล 2 ลูกใดใส่กล่องติดกัน

วิธีทำ

3.1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนของการนำลูกบอล 4 สีที่ต่างกันใส่ในกล่อง 8 กล่อง โดยไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติมมีจำนวนวิธีทั้งหมด เท่ากับ.....วิธี

3.2 วิธีเรียงสับเปลี่ยนของการนำลูกบอล 4 สีที่ต่างกันใส่ในกล่อง 8 กล่อง โดยลูกบอลทั้ง 4 ลูกใส่ในกล่องที่ติดกัน
(แนวคิด : คิดจำนวนวิธีที่กล่องติดกัน 4 กล่อง จากทั้งหมด 8 กล่องก่อน)

.....

.....

.....

.....

.....

3.3 วิธีเรียงสับเปลี่ยนของการนำลูกบอล 4 สีที่ต่างกันใส่ในกล่อง 8 กล่อง ไม่มีลูกบอล 2 ลูกใดใส่กล่องติดกัน
(แนวคิด : นำกล่องว่าง 4 ใบมาวางก่อน จากนั้นจะมีตำแหน่งสำหรับวางกล่องที่ใส่ลูกบอล 5 ตำแหน่ง)



.....

.....

.....

.....



4. ต้องการหาสีลูกเต๋าทูหน้า หน้าละ 1 สีไม่ซ้ำกัน จะมีวิธีการทำได้ทั้งหมดกี่วิธี เมื่อ

4.1 มีสีที่แตกต่างกัน 6 สี

4.2 มีสีที่แตกต่างกัน 8 สี

4.3 มีสีที่แตกต่างกัน 9 สี มีสีแดงอยู่ด้วย และต้องหาสีแดงเสมอ

4.4 มีสีที่แตกต่างกัน 10 สี มีสีแดง และสีเขียวอยู่ด้วย ต้องหาทั้งสองสีนี้ และสีเขียวต้องอยู่ตรงข้ามกับสีแดงเสมอ

วิธีทำ

4.1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนในการหาสีของลูกเต๋าทูหน้า 6 หน้า 6 สี ไม่ซ้ำกัน

.....
.....

4.2 วิธีเรียงสับเปลี่ยนในการหาสีของลูกเต๋าทูหน้า 6 หน้า 8 สี ไม่ซ้ำกัน

.....
.....

4.3 วิธีเรียงสับเปลี่ยนในการหาสีของลูกเต๋าทูหน้า 6 หน้า จาก 9 สี ไม่ซ้ำกัน

และต้องหาสีแดงเสมอ

.....
.....
.....
.....

4.4 วิธีเรียงสับเปลี่ยนในการหาสีของลูกเต๋าทูหน้า 6 หน้า จาก 10 สี ไม่ซ้ำกัน

โดยต้องหาสีแดง และสีเขียวด้วย และสีเขียวต้องอยู่ตรงข้ามกับสีแดงเสมอ

.....
.....
.....
.....
.....



5. ต้องการสร้างรหัสที่มีตัวอักษรอย่างน้อย 4 หลัก จาก a, b, c, d, e และ f โดยที่แต่ละหลักต้องไม่ซ้ำกัน ได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ ต้องการสร้างรหัสที่มีตัวอักษรอย่างน้อย 4 หลัก จากอักษร 6 ตัว มีวิธีต่าง ๆ กัน ดังนี้

[illegible]

ตอนที่ 2
วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น
ของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด



วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด หมายถึง การนำสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกัน มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น พร้อมกันทั้งหมด โดยคำนึงถึงลำดับ หรือตำแหน่งที่เป็นสำคัญ และสิ่งของที่ซ้ำกันถือว่าใช้แทนกันได้



ได้เวลาเรียนรู้ตอนที่ 2 วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น ของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด แล้วจ้า



ตอนที่ 2

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด หมายถึง การนำสิ่งของที่มีบางสิ่งที่ซ้ำกัน นำมาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น โดยคำนึงถึงตำแหน่งที่ของสิ่งของเป็นสำคัญ สิ่งของที่ซ้ำกัน ถือว่าใช้แทนกันได้ ในบทเรียนนี้จะกล่าวถึงการนำสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด นำมาเรียงทั้งหมดพร้อมกัน



วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

พิจารณาวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด เช่น ให้ A B และ C เป็นสิ่งของ 3 สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมด เมื่อนำมาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นจะได้ $3! = 6$ วิธี ดังนี้

ABC BAC ACB BCA CAB CBA

ถ้าให้ A และ B เป็นสิ่งที่ซ้ำกัน โดยเขียนแทน A และ B ด้วย X ดังนั้น วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของ 3 สิ่ง ที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด จะได้วิธีต่าง ๆ ดังนี้

XXC XXC XCX XCX CXX CXX

เมื่อพิจารณาแล้วจะพบว่าวิธีที่แตกต่างกัน 3 วิธี

ดังนี้ XXC XCX และ CXX

สิ่งของที่ซ้ำกันเมื่อสลับที่กัน จะถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน ใช้แทนกันได้
เรามาศึกษาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด
จากกิจกรรมต่อไป





กิจกรรมที่ 3.2

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

จุดประสงค์การเรียนรู้ : แก้โจทย์ปัญหาในเรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมดได้

- คำสั่ง**
1. จงแสดงวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด จากสถานการณ์ต่อไปนี และหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นที่แตกต่างกันทั้งหมด
 2. จากจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด จงหาความสัมพันธ์ในรูปแฟกทอเรียลที่สัมพันธ์กับจำนวนสิ่งของทั้งหมด และสิ่งของที่ซ้ำกันในแต่ละประเภท

สถานการณ์ที่ 1 ① ① ② ③ นำมาเรียงสับเปลี่ยนได้เป็น

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนวิธี

จากจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน เขียนในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น
 วิธี



สถานการณ์ที่ 2 มี ① ซ้ำกัน 2 ตัว และ 2 ซ้ำกัน 2 ตัว ดังนี้ ① ① ② ②
นำมาเรียงสับเปลี่ยนได้เป็น

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนวิธี

จากจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน เขียนในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น
..... วิธี



สถานการณ์ที่ 3 มี ① ซ้ำกัน 3 ตัว ดังนี้ ① ① ① ② นำมาเรียงสับเปลี่ยนได้เป็น

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนวิธี

จากจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน เขียนในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น
..... วิธี



สถานการณ์ที่ 4 มี ① ซ้ำกัน 3 ตัว ① ① ① ② ③ นำมาเรียงสับเปลี่ยนได้เป็น

เรียงสับเปลี่ยนได้ทั้งหมด..... วิธี

จากจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน เขียนในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น
..... วิธี



สถานการณ์ที่ 5 มี ① ซ้ำกัน 3 ตัว ② ซ้ำกัน 2 ตัว ① ① ① ② ②
นำมาเรียงสับเปลี่ยนได้เป็น

เรียงสับเปลี่ยนได้ทั้งหมด..... วิธี

จากจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน เขียนในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น
..... วิธี



สถานการณ์ที่ 6 มี ① ซ้ำกัน 4 ตัว ① ① ① ① ② นำมาเรียงสับเปลี่ยนได้เป็น

เรียงสับเปลี่ยนได้ทั้งหมด..... วิธี

จากจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน เขียนในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น
..... วิธี



นักเรียนคิดว่า จากกิจกรรมข้างต้น วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น
ของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด จะมีจำนวนวิธีที่แตกต่างกันทั้งหมด
โดยคำนวณจากความสัมพันธ์ใด ?



มาศึกษากันต่อไปเลยนะคะ



จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด



ถ้ามีสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง ใน n สิ่งนี้ มีสิ่งของ k กลุ่ม ในแต่ละกลุ่มสิ่งเหล่านั้นไม่แตกต่างกัน นั่นคือ

กลุ่มที่ 1 มีจำนวน n_1 สิ่ง ที่ไม่แตกต่างกัน

กลุ่มที่ 2 มีจำนวน n_2 สิ่ง ที่ไม่แตกต่างกัน

กลุ่มที่ 3 มีจำนวน n_3 สิ่ง ที่ไม่แตกต่างกัน

$\vdots$

กลุ่มที่ k มีจำนวน n_k สิ่ง

โดยที่ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ พิจารณาในแต่ละขั้นตอนได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 มีจำนวน n_1 สิ่ง เมื่อนำมาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นทั้งหมด ได้เท่ากับ $n_1!$ วิธี

แต่ทั้ง n_1 สิ่งนี้ไม่แตกต่างกัน ดังนั้นการเรียงสับเปลี่ยนดังกล่าวถือว่ามี $\frac{n_1!}{n_1!}$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 นำจำนวนสิ่งของกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 มารวมกัน มีจำนวน $n_1 + n_2$ สิ่ง

ในจำนวนกลุ่มที่ 2 มีจำนวน n_2 สิ่งที่ไม่แตกต่างกัน

เมื่อนำมาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นทั้งหมด ได้เท่ากับ $n_2!$ วิธี

แต่ใน $n_2!$ วิธี นี้ถือว่าเป็นวิธีที่ไม่แตกต่างกัน

ดังนั้นการเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 เท่ากับ $\frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!}$ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 นำจำนวนสิ่งของกลุ่มที่ 1 กลุ่มที่ 2 และกลุ่มที่ 3 มารวมกันมีจำนวน $n_1 + n_2 + n_3$ สิ่ง
 ในจำนวนกลุ่มที่ 3 มีจำนวน n_3 สิ่งที่ไม่แตกต่างกัน
 เมื่อนำมาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นทั้งหมด ได้เท่ากับ $n_3!$ วิธี
 แต่ใน $n_3!$ วิธี นี้ถือว่าเป็นวิธีที่ไม่แตกต่างกัน
 ดังนั้นการเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของกลุ่มที่ 1 กลุ่มที่ 2 และกลุ่มที่ 3
 เท่ากับ $\frac{(n_1 + n_2 + n_3)!}{n_1!n_2!n_3!}$ วิธี
 :

ขั้นตอนที่ k นำจำนวนสิ่งของกลุ่มที่ 1 กลุ่มที่ 2 ... และกลุ่มที่ k มารวมกัน มีจำนวน
 $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ สิ่ง
 ในจำนวนกลุ่มที่ k มีจำนวน n_k สิ่งที่ไม่แตกต่างกัน
 เมื่อนำมาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นทั้งหมด ได้เท่ากับ $n_k!$ วิธี
 แต่ใน $n_k!$ วิธี นี้ถือว่าเป็นวิธีที่ไม่แตกต่างกัน
 ดังนั้นการเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของกลุ่มที่ 1 กลุ่มที่ 2 กลุ่มที่ 3... และกลุ่มที่ k
 เท่ากับ $\frac{(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k)!}{n_1!n_2!n_3! \dots n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3! \dots n_k!}$ วิธี

ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่ง ในจำนวนนี้มี n_1 สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่หนึ่ง
 มี n_2 สิ่ง ที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่สอง ... มี n_k สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k
 โดยที่ $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนกลุ่มของสิ่งของ n สิ่ง
 เท่ากับ $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3! \dots n_k!}$ วิธี





นักเรียนศึกษาตัวอย่างในเรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น
ของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมดกันเล่นนะคะ

ตัวอย่างที่ 3.9

ต้องการจัดธงสีขาว่าที่เหมือนกัน 5 ธง และธงสีแดงที่เหมือนกัน 3 ธง
ในแนวเส้นตรง จะจัดเรียงสับเปลี่ยนได้ลักษณะต่าง ๆ กัน ได้กี่วิธี

วิธีทำ

ต้องการจัดเรียงธงสีขาว่า 5 ธง และธงสีแดง 3 ธง ในแนวตรง จะจัดได้จำนวน

$$\begin{aligned} \text{วิธีที่แตกต่างกันทั้งหมด} &= \frac{8!}{5!3!} \\ &= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!3!} \\ &= 56 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนธงทั้งหมดเท่ากับ 56 วิธี

ตัวอย่างที่ 3.10

ต้องการแขวนเสื้อที่เหมือนกัน 4 ตัว กระโปรงที่เหมือนกัน 3 ตัว และ
กางเกงที่เหมือนกัน 2 ตัว ในตู้โชว์ จะเรียงได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ

ต้องการจัดเสื้อที่เหมือนกัน 4 ตัว กระโปรงที่เหมือนกัน 3 ตัว และ
กางเกงที่เหมือนกัน 2 ตัว

$$\begin{aligned} \text{จะมีวิธีที่แตกต่างกันทั้งหมด} &= \frac{9!}{4!3!2!} \\ &= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!3!2!} \\ &= 1,260 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีในการจัดเสื้อ กระโปรงและกางเกงได้ทั้งหมดเท่ากับ 1,260 วิธี

ตัวอย่างที่ 3.11

มีลูกบอลสีแดงที่เหมือนกันอยู่ 2 ลูก ลูกบอลสีเขียวที่เหมือนกันอยู่ 3 ลูก และลูกบอลสีฟ้าที่เหมือนกันอยู่ 4 ลูก ถ้าต้องการนำลูกบอลทั้งหมดมาจัดเรียงเป็นแถวตรง จะมีวิธีจัดเรียงทั้งหมดกี่วิธี เมื่อ

- 1) ลูกบอลที่มีสีเดียวกันอยู่ติดกัน
- 2) ลูกบอลที่อยู่ริมทั้งสองด้านมีสีเดียวกัน

วิธีทำ

- 1) ต้องการเรียงลูกบอลที่มีสีเดียวกันอยู่ติดกัน จากทั้งหมด 9 ลูก



เสมือนว่ามีลูกบอลอยู่ 3 ลูก เนื่องจากลูกบอลที่มีสีเดียวกันเหมือนกัน ดังนั้น จะเรียงสับเปลี่ยนได้ทั้งหมด $3!$ วิธี

- 2) ต้องการเรียงลูกบอลที่มีสีเดียวกันอยู่ริมทั้งสองด้าน เนื่องจากมีลูกบอล 3 สี จึงคิดเป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ลูกบอลสีแดงอยู่ริมทั้งสองด้าน คิดเป็น 2 ขั้นตอนคือ



ขั้นตอนที่ 1 นำลูกบอลสีแดง 2 ลูก นำไปวางไว้ริมทั้งสองด้านได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เหลือลูกบอล 7 ลูก สีเขียว 3 ลูก สีฟ้า 4 ลูก จึงนำมาเรียงได้

$$\frac{7!}{3!4!} = 35 \text{ วิธี}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่ลูกบอลสีแดงอยู่ริมทั้งสองด้านเท่ากับ

$$1 \times 35 = 35 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 2 ลูกบอลสีเขียวอยู่ริมทั้งสองด้าน คิดเป็น 2 ขั้นตอนคือ



ขั้นตอนที่ 1 นำลูกบอลสีเขียว 2 ลูก นำไปวางไว้ริมทั้งสองด้านได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เหลือลูกบอล 7 ลูก สีแดง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก สีฟ้า 4 ลูก

$$\text{จึงนำมาเรียงได้ } \frac{7!}{2!1!4!} = 105 \text{ วิธี}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่ลูกบอลสีเขียวอยู่ริมทั้งสองด้านเท่ากับ

$$1 \times 105 = 105 \text{ วิธี}$$

กรณีที่ 3 ลูกบอลสีฟ้าอยู่ริมทั้งสองด้าน คิดเป็น 2 ขั้นตอนคือ



ขั้นตอนที่ 1 นำลูกบอลสีฟ้า 2 ลูก นำไปวางไว้ริมทั้งสองด้านได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เหลือลูกบอล 7 ลูก สีแดง 2 ลูก สีเขียว 3 ลูก สีฟ้า 2 ลูก

$$\text{จึงนำมาเรียงได้ } \frac{7!}{2!3!2!} = 210 \text{ วิธี}$$

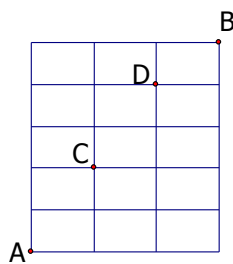
ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่ลูกบอลสีฟ้าอยู่ริมทั้งสองด้านเท่ากับ

$$1 \times 210 = 210 \text{ วิธี}$$

รวมทั้ง 3 กรณีมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดเท่ากับ $35 + 105 + 210 = 350$ วิธี

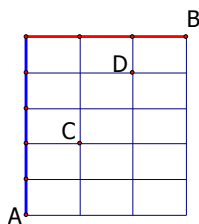
ตัวอย่างที่ 3.12

จากรูปที่กำหนดให้เป็นแผนผังของเมืองหนึ่ง ซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก รอยเส้นในแผนผังคือถนน ถ้ามีชายคนหนึ่งต้องการขับรถออกจากจุด A ไปยังจุด B โดยมีเงื่อนไขว่าชายผู้นี้จะต้องขับรถไปทางทิศเหนือ หรือทิศตะวันออกเท่านั้น อยากทราบว่าชายผู้นี้จะมีวิธีการเลือกเส้นทางได้ทั้งหมดกี่วิธี เมื่อ



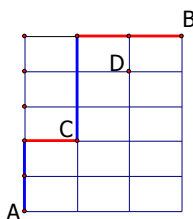
- 1) ไม่มีเงื่อนไขใดเพิ่มเติม
- 2) ต้องขับรถผ่านจุด C ด้วย
- 3) ต้องขับรถผ่านจุด C และ จุด D ด้วย

วิธีทำ 1) จากรูปจะพบว่า มีเส้นทางไปทางทิศเหนือ 5 เส้นทางที่เหมือนกัน และ ทิศตะวันออก 3 เส้นทางที่เหมือนกัน รวมทั้งหมดมี 8 เส้นทาง



ดังนั้น มีจำนวนวิธีในการเดินทางจาก A ไป B เท่ากับ $\frac{8!}{5!3!} = 56$ วิธี

2) จากรูปจะพบว่า มีเส้นทางจากจุด A ไป B โดยผ่าน C มี 2 ขั้นตอน คือ



ขั้นตอนที่ 1 เดินทางจาก A ไป C ทิศเหนือมี 2 เส้นทาง ทิศตะวันออก

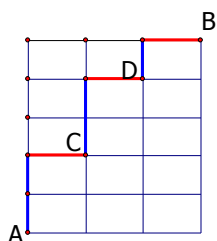
มี 1 เส้นทาง รวม 3 เส้นทาง มีจำนวน $\frac{3!}{2!1!} = 3$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เดินทางจาก C ไป B ทิศเหนือมี 3 เส้นทางทิศตะวันออก

2 เส้นทาง รวม 5 เส้นทาง มีจำนวน $\frac{5!}{3!2!} = 10$ วิธี

ดังนั้น มีจำนวนวิธีในการเดินทางจาก A ไป B โดยผ่าน C มีเส้นทางทั้งหมดเท่ากับ $3 \times 10 = 30$ วิธี

- 3) จากรูปจะพบว่า มีเส้นทางจากจุด A ไป B โดยผ่าน C และ D มี 3 ขั้นตอน คือ



ขั้นตอนที่ 1 เดินทางจาก A ไป C ทิศเหนือมี 2 เส้นทาง ทิศตะวันออกมี 1 เส้นทาง รวม 3 เส้นทาง มีจำนวน $\frac{3!}{2!1!} = 3$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เดินทางจาก C ไป D ทิศเหนือมี 2 เส้นทาง ทิศตะวันออกมี 1 เส้นทาง รวม 3 เส้นทาง มีจำนวน $\frac{3!}{2!1!} = 3$ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เดินทางจาก D ไป B ทิศเหนือมี 1 เส้นทาง ทิศตะวันออกมี 1 เส้นทาง รวม 2 เส้นทาง มีจำนวน $\frac{2!}{1!1!} = 2$ วิธี

ดังนั้น มีจำนวนวิธีในการเดินทางจาก A ไป B โดยผ่าน C และ D มีเส้นทางทั้งหมดเท่ากับ $3 \times 3 \times 2 = 18$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3.13

ถ้าต้องการสร้างจำนวนเต็มที่มี 6 หลักจากเลขโดด 0, 1, 1, 2, 2, 2 มาจัดเรียง จะสร้างจำนวนเต็มที่มี 6 หลัก ได้ทั้งหมดกี่จำนวน เมื่อ

- 1) จำนวนที่สร้างอยู่ระหว่าง 100,000 และ 200,000
- 2) จำนวนที่สร้างมีค่ามากกว่า 200,000
- 3) จำนวนที่สร้างมีค่ามากกว่า 100,000 และเป็นจำนวนคู่

วิธีทำ 1) ต้องการสร้างจำนวนเต็มที่มี 6 หลักที่อยู่ระหว่าง 100,000 และ 200,000

หลักแสน	หลักหมื่น	หลักพัน	หลักร้อย	หลักสิบ	หลักหน่วย
1					

แสดงว่าหลักแสน จะต้องเป็นเลข 1 เท่านั้น จึงสร้างได้ 1 วิธี

อีก 5 หลักจึงต้องสร้างจาก 5 ตัวที่เหลือ ประกอบด้วย

0 มี 1 ตัว 1 มี 1 ตัว 2 มี 3 ตัว จะสร้างได้ $\frac{5!}{1!1!3!} = 20$ จำนวน

ดังนั้น จำนวนวิธีในการสร้างจำนวนทั้งหมดได้ $1 \times 20 = 20$ จำนวน

2) ต้องการสร้างจำนวนเต็มที่มี 6 หลักที่มีค่ามากกว่า 200,000

หลักแสน	หลักหมื่น	หลักพัน	หลักร้อย	หลักสิบ	หลักหน่วย
2					

แสดงว่าหลักแสน ต้องเป็นเลข 2 เท่านั้น จึงสร้างได้ 1 วิธี

อีก 5 หลักจึงต้องสร้างจาก 5 ตัวที่เหลือ ประกอบด้วย

0 มี 1 ตัว 1 มี 2 ตัว 2 มี 2 ตัว จะสร้างได้ $\frac{5!}{1!2!2!} = 30$ จำนวน

ดังนั้น จำนวนวิธีในการสร้างจำนวนทั้งหมดได้ $1 \times 30 = 30$ จำนวน

3) ต้องการสร้างจำนวนเต็มที่มี 6 หลักที่มีค่ามากกว่า 100,000 และเป็นจำนวนคู่

แสดงว่าหลักแสนต้องเป็นเลข 1 หรือ 2 และลงท้ายด้วย 0 หรือ 2

จึงแบ่งเป็น 4 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 หลักแสนเป็นเลข 1 หลักหน่วยให้เป็นเลข 0

อีก 4 หลักที่เหลือสร้างจาก 1 มี 1 ตัว 2 มี 3 ตัว

จำนวนวิธีที่สร้างได้ $\frac{4!}{1!3!} = 4$ จำนวน

กรณีที่ 2 หลักแสนเป็นเลข 1 หลักหน่วยให้เป็นเลข 2

อีก 4 หลักที่เหลือสร้างจาก 0 มี 1 ตัว 1 มี 1 ตัว 2 มี 2 ตัว

จำนวนวิธีที่สร้างได้ $\frac{4!}{1!1!2!} = 12$ จำนวน

กรณีที่ 3 หลักแสนเป็นเลข 2 หลักหน่วยให้เป็นเลข 0

อีก 4 หลักที่เหลือสร้างจาก 1 มี 2 ตัว 2 มี 2 ตัว

จำนวนวิธีที่สร้างได้ $\frac{4!}{2!2!} = 6$ จำนวน

กรณีที่ 4 หลักแสนเป็นเลข 2 หลักหน่วยให้เป็นเลข 2

อีก 4 หลักที่เหลือสร้างจาก 0 มี 1 ตัว 1 มี 2 ตัว 2 มี 1 ตัว

จำนวนวิธีที่สร้างได้ $\frac{4!}{1!2!1!} = 12$ จำนวน

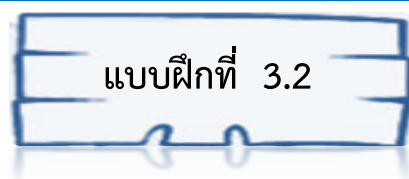
ดังนั้น จำนวนวิธีในการสร้างจำนวนทั้งหมดได้ $4 + 12 + 6 + 12 = 34$ จำนวน

หากมีข้อสงสัย ให้สอบถามครูผู้สอนทันทีนะคะ



ได้เวลาทดสอบความรู้แล้ว
มาทำแบบฝึกกันนะคะ





จุดประสงค์การเรียนรู้ : แก้ไขโจทย์ปัญหาในเรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมดได้

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำประกอบการหาคำตอบ ทุกข้อ

1. จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดตัวเลขทั้ง 9 ตัว ใน “401021014” ให้ได้จำนวนเต็มที่มี 9 หลัก ต่าง ๆ กัน

วิธีทำ ต้องการเรียงตัวเลข 9 ตัว ซึ่งประกอบด้วย

0 มีจำนวน.....

1 มีจำนวน.....

2 มีจำนวน.....

4 มีจำนวน.....

ดังนั้น จำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนตัวเลข 9 หลัก เท่ากับ

.....
.....

2. ในการจัดหลอดไฟสีเพื่อประดับเสาต้นหนึ่งตามแนวดิ่ง เสาต้นนี้ติดหลอดไฟเรียงกันได้ 12 หลอด ถ้ามีหลอดไฟสีแดงที่เหมือนกัน 3 หลอด หลอดไฟสีขาวที่เหมือนกัน 4 หลอด และหลอดไฟสีน้ำเงินที่เหมือนกัน 5 หลอด จะมีจำนวนวิธีในการติดหลอดไฟประดับได้แตกต่างกันกี่วิธี

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....



3. มีหนังสือที่แตกต่างกัน 5 วิชา ในแต่ละวิชามี 2 เล่มที่เหมือนกัน ถ้าต้องการจัดหนังสือเป็นแถวยาวแถวเดียว จะจัดได้กี่วิธี เมื่อ

3.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

3.2 หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกัน

3.3 หนังสือที่อยู่ริมทั้งสองด้านเป็นวิชาเดียวกัน

วิธีทำ 3.1 ต้องการจัดหนังสือที่แตกต่างกัน 5 วิชา ในแต่ละวิชามี 2 เล่มที่เหมือนกัน

เป็นแถวยาวแถวเดียว จะจัดได้ วิธี

3.2 ต้องการจัดหนังสือที่แตกต่างกัน 5 วิชา ในแต่ละวิชามี 2 เล่มที่เหมือนกัน เป็นแถวยาวแถวเดียว โดยที่หนังสือวิชาเดียวกันจะต้องอยู่ติดกัน

จะจัดได้ วิธี

3.3 ต้องการจัดหนังสือที่แตกต่างกัน 5 วิชา ในแต่ละวิชามี 2 เล่มที่เหมือนกัน เป็นแถวยาวแถวเดียว หนังสือที่อยู่ริมทั้งสองด้านเป็นวิชาเดียวกัน

จะจัดได้ วิธี



4. จงหาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษรในคำว่า MILLION

4.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

4.2 อักษร I ต้องอยู่ติดกัน

4.3 อักษร L ต้องไม่อยู่ติดกัน

วิธีทำ ตัวอักษรในคำว่า MILLION มีทั้งหมด 7 ตัว ประกอบด้วย

M มี ตัว

I มี ตัว

L มี ตัว

O มี ตัว

N มี ตัว

4.1 ต้องการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นตัวอักษรที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด จะจัดเรียงได้เท่ากับ วิธี

4.2 เนื่องจากอักษร I มี 2 ตัว จึงคิดเป็น 1 ตำแหน่ง กับตัวอักษรอีก 5 ตัว วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด 6 สิ่ง จัดเรียงได้ทั้งหมดเท่ากับ วิธี

4.3 เนื่องจากอักษร L มี 2 ตัว ต้องการให้อักษร L ไม่อยู่ติดกัน ดังนั้นจึงนำตัวอักษร ที่เหลือ 5 ตัวมาเรียงก่อน แล้วจึงนำ L มาแทรก ซึ่งพบว่าจะมีที่ว่าง 6 ตำแหน่ง



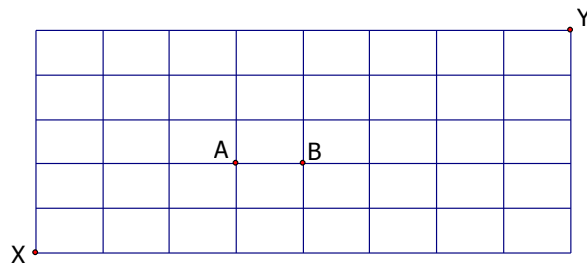
จึงมีวิธีการเรียง 2 ขั้นตอนคือ

ขั้นตอนที่ 1 ตัวอักษร L มี 2 ตัว เลือกที่ว่าง 6 ตำแหน่ง ได้เท่ากับ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ตัวอักษรอีก 5 ตัว มี 1 ซ้ำกัน 2 ตัว จึงเรียงสับเปลี่ยนแบบ ได้เท่ากับ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเท่ากับ วิธี

5. จากรูปที่กำหนดให้

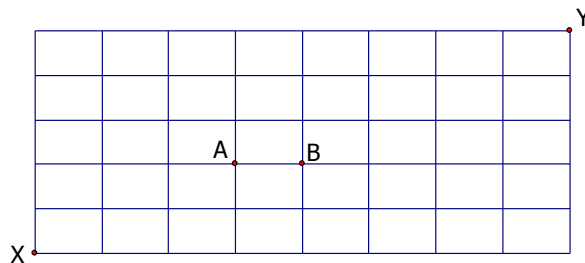


แสดงแผนผังของเมืองหนึ่ง รอยเส้นในแผนผังแทนถนน ถ้าต้องการเดินทางออกจากจุด X ไปยังจุด Y โดยมีเงื่อนไขว่า จะต้องเดินทางไปทางทิศเหนือ หรือทิศตะวันออกเท่านั้น จงหาจำนวนวิธีการเลือกเส้นทางทั้งหมด โดยที่

5.1 ต้องเดินทางผ่านจุด A

5.2 ต้องเดินทางผ่านถนนที่เชื่อมจุด A และ B

วิธีทำ 5.1 การเดินทางจากจุด X ไปยังจุด Y โดยผ่านจุด A มีขั้นตอน ดังนี้
(ให้นักเรียนลากเส้นแสดงเส้นทางที่ใช้เดินทางด้วย)



.....

.....

.....

.....

.....

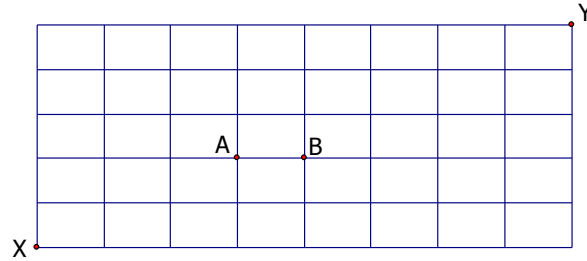
.....

.....

.....

.....

5.2 การเดินทางจากจุด X ไปยังจุด Y โดยผ่านถนนเชื่อม A และ B มีขั้นตอน
ดังนี้ (ให้นักเรียนลากเส้นแสดงเส้นทางที่ใช้เดินทางด้วย)



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



ก่อนจะทำแบบทดสอบหลังเรียน มาดูกันว่าเราควรสรุปได้ว่า



จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด นำมาจัดเรียงทั้งหมด เท่ากับ $n!$ วิธี

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดเรียงคราวละ r สิ่ง ($1 \leq r \leq n$) เท่ากับ $P_{n,r}$ วิธี เมื่อ $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่ง ในจำนวนสิ่งของ n สิ่งนี้มี n_1 สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 1 มี n_2 สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 2 มี n_3 สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 3 ... มี n_k สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k โดยที่ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งนี้ เท่ากับ $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\dots n_k!}$ วิธี

ไปทำแบบทดสอบหลังเรียนกันได้เลยคะ



แบบทดสอบหลังเรียน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 (ค32204)
เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

คำชี้แจง แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

คำสั่ง ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย ✕ ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกต้องที่สุด
เพียงคำตอบเดียว

1. ครอบครัวหนึ่งมี พ่อ แม่ และลูกอีก 5 คน ต้องการจัดแถวยาวเพื่อถ่ายรูป จะมีวิธีจัดให้ยืน
ได้ทั้งหมดกี่วิธี

ก. 7! วิธี

ข. 10! วิธี

ค. 12! วิธี

ง. 15! วิธี

จ. 20! วิธี

2. นักเรียนชาย 3 คน และนักเรียนหญิง 2 ต้องการนั่งเป็นแถวตรง จะมีวิธีการนั่งได้กี่วิธี
ถ้านักเรียนหญิงทั้งสองคนต้องนั่งติดกัน

ก. 24 วิธี

ข. 48 วิธี

ค. 60 วิธี

ง. 72 วิธี

จ. 98 วิธี

3. มีชาย 5 คน หญิง 6 คน มายืนเรียงแถวยาว จะมีวิธีการยืนได้กี่วิธี ถ้าไม่มีชาย 2 คนใด
ยืนติดกัน

ก. 1,514,400 วิธี

ข. 1,614,400 วิธี

ค. 1,714,400 วิธี

ง. 1,814,400 วิธี

จ. 1,914,400 วิธี

4. เลือกนักเรียน 3 คน จากนักเรียนทั้งหมด 20 คน มาเป็นหัวหน้าห้อง รองหัวหน้าห้อง และเลขานุการ ได้ทั้งหมดกี่วิธี

ก. 4,840 วิธี	ข. 5,840 วิธี
ค. 6,840 วิธี	ง. 7,840 วิธี
จ. 8,840 วิธี	

5. ต้องการสร้างจำนวนเต็มที่มี 2 หลัก จากตัวเลข 1, 2, 3, 4, 5 จะสร้างได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่จำนวน

ก. 10 จำนวน	ข. 20 จำนวน
ค. 30 จำนวน	ง. 40 จำนวน
จ. 50 จำนวน	

6. ต้องการจัดเรียงของวัตถุที่แตกต่างกัน จำนวน 12 ชิ้น ในแนวนตรง จะมีวิธีการจัดเรียงได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

ก. 12 วิธี	ข. $(12 - 1)!$ วิธี
ค. $12!$ วิธี	ง. $\frac{12!}{12}$ วิธี
จ. $24!$ วิธี	

7. มีตัวเลข 7 ตัว ดังนี้ 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4 ถ้าต้องการนำตัวเลขทั้งหมดนี้มาเรียงเป็นจำนวนเต็มที่มี 7 หลักจะสามารถเรียงได้กี่จำนวน

ก. 120 จำนวน	ข. 260 จำนวน
ค. 360 จำนวน	ง. 400 จำนวน
จ. 420 จำนวน	

กระดานคำตอบ แบบทดสอบหลังเรียน
เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น

ข้อที่	ก	ข	ค	ง	จ
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					



แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน

เล่ม 3 วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	ความก้าวหน้า	คิดเป็นร้อยละ
การทดสอบก่อนเรียน	10			
การทดสอบหลังเรียน	10			



แบบบันทึกคะแนนความก้าวหน้าของแบบฝึกหัดระหว่างเรียน

เล่ม 3 วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

แบบฝึกที่	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	คิดเป็นร้อยละ	ผ่าน เกณฑ์*	ไม่ผ่าน เกณฑ์**
3.1	39				
3.2	30				
รวมทั้งหมด	69				
เฉลี่ย					
คิดเป็นร้อยละ					

* ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนร้อยละ 75 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

** ไม่ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนน้อยกว่าร้อยละ 75 ของคะแนนเต็ม



บรรณานุกรม

กนกวลี อุษณกรกุล เรณู สุทธิวารี และรณชัย มาเจริญทรัพย์. เตรียมสอบ PET 1

คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 4 ม.4-6. กรุงเทพฯ: ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.

กมล เอกไทยเจริญ. คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 6 ค016. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง.

_____. (2557). เทคนิคการทำโจทย์ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ม.5 เทอม 2. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง.

คณิต มงคลพิทักษ์สุข. HI-SPEED MATHS FOR PAT1 & EXAM. กรุงเทพฯ: SCIENCE CENTER.

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (2556). คู่มือประกอบการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4 – 6 เล่ม 4. กรุงเทพฯ: พ.ศ. พัฒนา จำกัด.

ฉวีวรรณ เสวตมาลย์ และคณะ. (2545). กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-6) เล่ม 3. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: ประสารมิตร.

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). 1001 TESTS IN MATHS 3. กรุงเทพฯ: แม็ค.

พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร. (2555). คู่มือคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4 – 6 เล่ม 4. กรุงเทพฯ: เดอร์บุคส์.

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. (2542). แนวคิดหลักมูล

ทางคณิตศาสตร์ 1. 500 เล่ม. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

เลิศ สิทธิโกศล. (2555). Math Review คณิตศาสตร์ ม.4 – 6 เล่ม 4 (เพิ่มเติม). กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง.

สถาบันส่งเสริมการสอนการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.). (2544). เอกสารเสริม

ความรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง คอมบินาทอริก. 3,000 เล่ม. พิมพ์ครั้งที่ 1.

กรุงเทพฯ: สำนักพัฒนาธุรกิจ.

_____. (2553). หนังสือเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เล่ม 4. 350,000 เล่ม. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: สกสค. ลาดพร้าว.

_____. (2553). คู่มือครูรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เล่ม 4. 5,000 เล่ม. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: สกสค. ลาดพร้าว.

สมพร สุนันทน์โอภาส. (2539). คณิตศาสตร์ทางด้านวิธีจัดหมู่เบื้องต้น. 1,000 เล่ม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

บรรณานุกรม (ต่อ)

สมัย เหล่าวานิชย์. **คู่มือคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพรณ เหล่าวานิชย์. **คณิตศาสตร์ 4 พื้นฐาน + เพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

สุเทพ จันทร์สมบัติ และสุเทพ ทองอยู่. **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ 6 ม.6 เล่ม 6 ค016**. กรุงเทพฯ: ภูมิบัณฑิต.

