



คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของหน่วยการเรียนรู้เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ประกอบด้วยแบบฝึกทักษะทั้งหมด 10 เล่ม ดังนี้

- เล่ม 1 ลิมิตของฟังก์ชัน
- เล่ม 2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน
- เล่ม 3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
- เล่ม 4 อัตราการเปลี่ยนแปลง
- เล่ม 5 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
- เล่ม 6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร
- เล่ม 7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ
- เล่ม 8 ความชันของเส้นโค้ง
- เล่ม 9 อนุพันธ์อันดับสูง
- เล่ม 10 การประยุกต์ของอนุพันธ์

โดยในแบบฝึกทักษะแต่ละเล่ม ประกอบด้วยผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ครอบคลุมทั้งด้านความรู้ ด้านทักษะกระบวนการและด้านคุณลักษณะ ซึ่งกิจกรรมของแบบฝึกทักษะแต่ละเล่มเสร็จสมบูรณ์ในตัวเอง ผู้เรียนสามารถใช้ได้ด้วยตนเอง

สำหรับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่ม 10 การประยุกต์ของอนุพันธ์ จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 27-30 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ มีจุดมุ่งหมายเพื่อให้นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปประยุกต์ใช้ได้ อีกทั้งยังเป็นแนวทางในการปฏิรูปกระบวนการจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ส่งเสริมผู้เรียนได้ฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์และแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง อันจะทำให้ผู้เรียนเกิดความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหามากยิ่งขึ้น เกิดความคงทนในการเรียนรู้ และสามารถนำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ การค้นคว้าหาความรู้ของนักเรียนและเป็นประโยชน์ต่อผู้สนใจ เพื่อนครูและวงการศึกษต่อไป

พนารัตน์ รอดภัย



	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	ข
คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับครูผู้สอน	ค
คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน	ง
ผลการเรียนรู้	จ
จุดประสงค์การเรียนรู้	จ
สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	จ
ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน	ฉ
สาระสำคัญ	ช
แบบทดสอบก่อนเรียน	1
กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน	3
ยังจำได้ไหม	4
ใบความรู้ 10.1 ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด	5
แบบฝึกทักษะ 10.1	10
ใบความรู้ 10.2 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์	15
แบบฝึกทักษะ 10.2	22
ใบความรู้ 10.3 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์	27
แบบฝึกทักษะ 10.3	33
ใบความรู้ 10.4 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด	38
แบบฝึกทักษะ 10.4	42
แบบทดสอบหลังเรียน	47
กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน	49
แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน	50
แบบบันทึกความก้าวหน้าของแบบฝึกทักษะ	51
บรรณานุกรม	52
ภาคผนวก	54
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	55
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	56
เฉลยแบบฝึกทักษะ 10.1	57
เฉลยแบบฝึกทักษะ 10.2	62
เฉลยแบบฝึกทักษะ 10.3	67
เฉลยแบบฝึกทักษะ 10.4	72

คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับครูผู้สอน

1. ศึกษาแผนการจัดการเรียนรู้และการใช้แบบฝึกทักษะ
2. ศึกษาและทำความเข้าใจเนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้และการดำเนินการสอน เพื่อให้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็นไปตามลำดับขั้นตอน
3. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน
4. ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้
5. ให้คำแนะนำและความช่วยเหลือแก่นักเรียนเมื่อมีปัญหา ตามความเหมาะสมกับความสามารถและศักยภาพของนักเรียนที่ต่างกัน
6. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน
7. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ใช้เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน 4 ชั่วโมง



คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับผู้เรียน

1. ศึกษาการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
2. ศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้ เพื่อให้ทราบว่านักเรียนต้องรู้และปฏิบัติสิ่งใดบ้างหลังจากจบบทเรียนแล้ว
3. ทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อตรวจสอบความรู้เดิมในเรื่องที่เรียน จากนั้นตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน
4. ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้เข้าใจ แล้วทำแบบฝึกทักษะตามลำดับขั้นตอน
5. หากไม่เข้าใจหรือมีปัญหา นักเรียนสามารถปรึกษาและแลกเปลี่ยนองค์ความรู้
6. ทำแบบทดสอบหลังเรียนแล้วตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน แล้วเปรียบเทียบกับคะแนนทดสอบก่อนเรียน
7. หากยังมีข้อสงสัยและไม่เข้าใจให้กลับไปทบทวนบทเรียนจากแบบฝึกทักษะอีกครั้ง
8. นักเรียนควรซื่อสัตย์ต่อตนเอง โดยไม่เปิดดูเฉลยระหว่างศึกษาแบบฝึกทักษะ เพื่อนักเรียนจะได้พัฒนาการเรียนรู้ของตนเองอย่างเต็มความสามารถ



ผลการเรียนรู้

นำความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปประยุกต์ใช้ได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

1. ตรวจสอบได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันลดหรือฟังก์ชันเพิ่มในช่วงใด ๆ และนำไปใช้ได้
2. หาค่าวิกฤตและจุดวิกฤตของฟังก์ชันได้
3. หาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันได้
4. หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
5. นำความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาเพื่อหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดได้

ด้านทักษะกระบวนการ

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความซื่อสัตย์ สุจริต
2. มีวินัย
3. ใฝ่เรียนรู้
4. มุ่งมั่นในการทำงาน

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

1. ความสามารถในการสื่อสาร
2. ความสามารถในการคิด
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา



ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน



สาระสำคัญ

ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $A \subset D_f$

1. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันลด (decreasing function) บนช่วง A
2. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) บนช่วง A

บทนิยาม ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ ถ้ามีช่วง $(a, b) \subset D_f$ ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (a, b) เรียก $f(c)$ ว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) ของฟังก์ชัน f และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(c, f(c))$

ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ ถ้ามีช่วง $(a, b) \subset D_f$ ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (a, b) เรียก $f(c)$ ว่า ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) ของฟังก์ชัน f และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(c, f(c))$

ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ $f'(c)$ หาค่าได้ ถ้า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f จะได้ว่า $f'(c) = 0$

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) ค่าของ $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = 0$ จะเรียกว่า ค่าวิกฤต (critical value) ของฟังก์ชัน f

ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ เป็นค่าวิกฤตของ f

ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนบวกเป็นจำนวนลบ เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นรอบ ๆ c แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวก เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นรอบ ๆ c แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

แบบทดสอบก่อนเรียน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

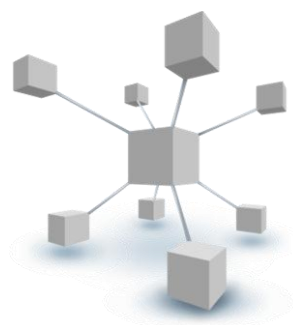
เล่ม 10 การประยุกต์ของอนุพันธ์

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกที่สุด

1. พิจารณา $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใด
 - ก. $(-2, 1)$
 - ข. $(1, \infty)$
 - ค. $(-\infty, -2)$
 - ง. $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$
2. พิจารณา $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วงใด
 - ก. $(-2, 1)$
 - ข. $(1, \infty)$
 - ค. $(-\infty, -2)$
 - ง. $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$
3. กำหนดให้ $y = x^2 - 4x - 1$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันตรงกับข้อใด
 - ก. จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = 2 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = 5
 - ข. จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = -2 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = 5
 - ค. จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = 2 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = -5
 - ง. จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = -2 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = -5
4. กำหนดให้ $y = 7 + 4x - 2x^2$ จุดสูงสุดสัมพัทธ์และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันตรงกับข้อใด
 - ก. จุดสูงสุดสัมพัทธ์ = 1 และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ = 9
 - ข. จุดสูงสุดสัมพัทธ์ = 9 และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ = 1
 - ค. จุดสูงสุดสัมพัทธ์ = 2 และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ = 7
 - ง. จุดสูงสุดสัมพัทธ์ = 4 และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ = 23
5. กำหนดให้ $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 1$ จงพิจารณาว่าที่ $x = 2$ ฟังก์ชัน f มีลักษณะอย่างไร
 - ก. f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = 2 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = -15
 - ข. f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = 2 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = 0
 - ค. f จุดสูงสุดสัมพัทธ์ = 2 และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ = 0
 - ง. f จุดสูงสุดสัมพัทธ์ = 2 และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ = -15
6. กำหนดให้ $y = x^3 + 5x - 4$ จุดต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันตรงกับข้อใด
 - ก. จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = -1 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = -10
 - ข. จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = 1 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = -10
 - ค. จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = 3 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = -46
 - ง. จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = -3 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = -46

7. แผ่นสังกะสีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 12 นิ้ว ต้องการทำเป็นกล่องข้างบนฝาเปิด โดยการตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกจากมุมทั้งสี่เท่า ๆ กัน แล้วพับส่วนที่เหลือขึ้นเป็นด้านข้างของกล่อง ถ้าปริมาตรของกล่องนี้มีค่ามากที่สุด ถามว่าความยาวของด้าน สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ตัดออกจะเป็นเท่าใด
- 1 นิ้ว
 - 2 นิ้ว
 - 4 นิ้ว
 - 5 นิ้ว
8. นายแดงต้องการจะกั้นรอบที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าไว้ปลูกส้ม โดยใช้รั้วบ้านเป็นรั้วด้านหนึ่งของที่ดินแปลงนี้ ถ้าเขามีลวดหนามยาว 400 เมตร และต้องการล้อมรั้วให้ได้พื้นที่มากที่สุดนายแดงจะล้อมรั้วได้พื้นที่มากที่สุดกี่ตารางเมตร
- 20,000 ตารางเมตร
 - 25,000 ตารางเมตร
 - 30,000 ตารางเมตร
 - 40,000 ตารางเมตร
9. สามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มีด้านทั้งสามยาว 3 , 4 , 5 นิ้ว ตามลำดับ สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดสามารถบรรจุในสามเหลี่ยมนี้ได้ จะมีพื้นที่กี่ตารางนิ้ว
- 6 ตารางนิ้ว
 - 4 ตารางนิ้ว
 - 3 ตารางนิ้ว
 - 2 ตารางนิ้ว
10. พ่อค้าขายเสื้อยืดราคาตัวละ 25 บาท เขาจะขายได้วันละ 500 ตัว ถ้าเขาลดราคาขายลงอีกตัวละ x บาท เขาจะขายเสื้อยืดได้เพิ่มอีกวันละ $100x$ ตัว จงหาว่าเขาจะขายเสื้อยืดได้เงินมากที่สุด เขาต้องตั้งราคาขายตัวละเท่าไร
- 10
 - 15
 - 20
 - 23



กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

มากกว่า 0

ยังจำได้ไหม



เมื่อวานไปเจอแบบฝึกหัดเรื่องการแก้อสมการข้อหนึ่ง งงเรื่องเส้นจำนวนมากเลย
เธอช่วยอธิบายให้ฟังหน่อยสิ

ได้สิ โจทย์เป็นอย่างไรละ



น้อยกว่า 0

เช่นโจทย์คือ จงแก้อสมการ $x^2 - 5x + 6 > 0$

เค้าเขียนเส้นจำนวนแบบนี้



อ้อ เครื่องหมายบวกหมายความว่าถ้าจำนวนจริงที่มากกว่า 3
ไปแทนในอสมการ จะทำให้คำตอบ.....

ในทำนองเดียวกัน ถ้าจำนวนจริงที่น้อยกว่า 2 ไปแทนใน
อสมการ จะทำให้คำตอบ.....



เครื่องหมายลบก็หมายความว่า ถ้าจำนวนจริงที่มากกว่า 2 แต่
น้อยกว่า 3 ไปแทนในอสมการ จะทำให้คำตอบ.....

ใบความรู้ 10.1

ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด

การประยุกต์ของอนุพันธ์ โดยใช้อนุพันธ์ในการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของสิ่งที่ต้องการจากปัญหาทั่วไป การแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดนั้น เรามักจะจำลองปัญหานั้นด้วยฟังก์ชัน เช่น สมมติว่า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่เขียนขึ้นจากปัญหาซึ่งต้องการทราบว่า x มีค่าเป็นเท่าใดจึงจะทำให้ y มีค่าสูงสุด หรือ y มีค่าต่ำสุด

สำหรับฟังก์ชันกำลังสอง การหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดอาจทำได้โดยใช้วิธีกำลังสองสมบูรณ์ ดังที่ได้เรียนมาแล้วในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ถ้าฟังก์ชันมีกำลังของ x มากกว่า 2 หรือเขียนในรูปกำลังสองสมบูรณ์ไม่ได้ การหาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดอาจทำได้โดยการเขียนกราฟของฟังก์ชันแล้วดูค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดจากกราฟแต่วิธีเขียนกราฟทำให้ล่าช้าและไม่สะดวกและผลลัพธ์มักคลาดเคลื่อนจึงไม่นิยมใช้

นอกจากวิธีที่กล่าวมาแล้ว อาจพิจารณาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดโดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

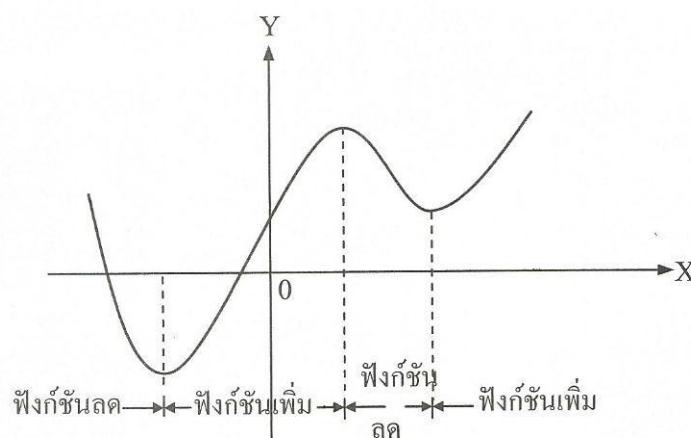
ในการพิจารณาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุด โดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชัน เราจะต้องมีความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดดังนี้

กำหนด f เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ R ไป R และ A เป็นสับเซตของ D_f

f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$

f เป็นฟังก์ชันลดบน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

พิจารณารูปของฟังก์ชันต่อไปนี้

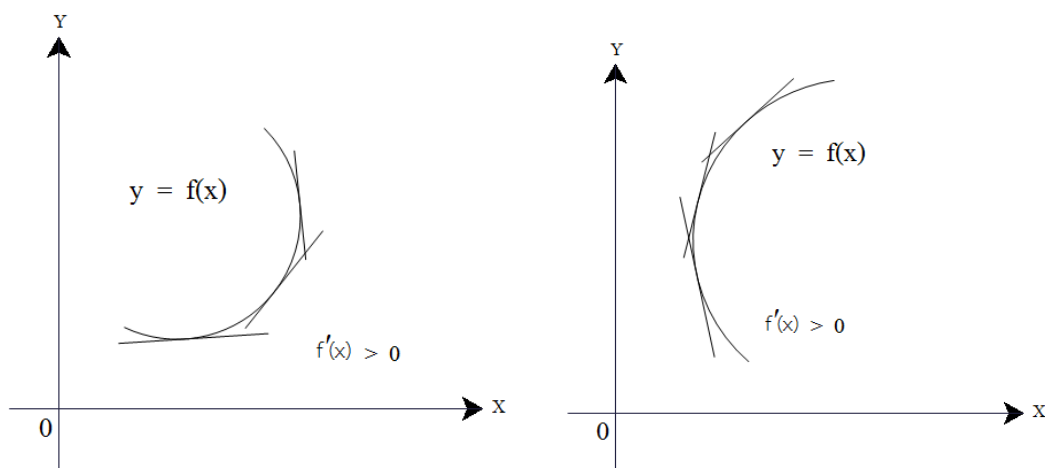


ภาพที่ 10.1 แสดงกราฟของฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

ที่มา: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554: 113)

จากภาพที่ 10.1 จะเห็นว่า ในบางช่วงฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันลด ในบางช่วงเป็นฟังก์ชันเพิ่ม

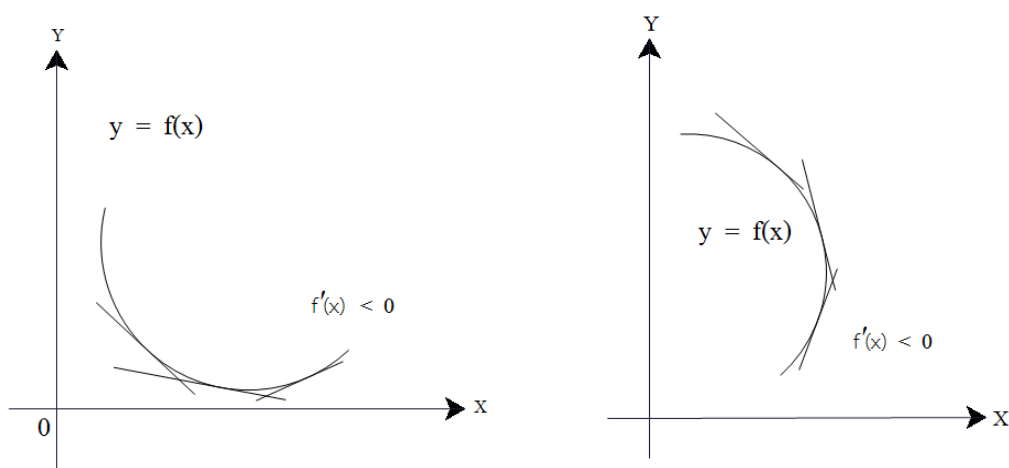
พิจารณาความชันของเส้นสัมผัสโค้งของกราฟของฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด ดังต่อไปนี้



ภาพที่ 10.2 แสดงกราฟของฟังก์ชันเพิ่ม

ที่มา: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554: 113)

จากภาพที่ 10.2 เป็นกราฟของฟังก์ชันเพิ่ม เนื่องจากเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้นด้วย และจะเห็นว่าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดใด ๆ บนเส้นโค้งนี้เป็นจำนวนบวก นั่นคือ $f'(x) > 0$



ภาพที่ 10.3 แสดงกราฟของฟังก์ชันลด

ที่มา: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554: 114)

จากภาพที่ 10.3 แสดงกราฟของฟังก์ชันลด เนื่องจากเมื่อ x เพิ่มขึ้น ค่าของ $f(x)$ จะลดลง และจะเห็นว่าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดใด ๆ บนเส้นโค้งนี้เป็นจำนวนลบ นั่นคือ $f'(x) < 0$

การพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนช่วงใดบ้าง อาจทำได้โดยพิจารณาจากค่าของความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

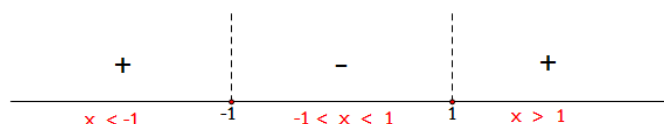
ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $A \subset D_f$

1. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันลด (decreasing function) บนช่วง A
2. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) บนช่วง A

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 3x + 2$ จงตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใด และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วงใด

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 - 3x + 2$
 จะได้ $f'(x) = 3x^2 - 3$
 $= 3(x^2 - 1)$
 $= 3(x - 1)(x + 1)$

ตรวจสอบค่าของ $f'(x)$ โดยเขียนเส้นจำนวนและจุดแบ่งช่วง ดังนี้



จะได้ว่า $f'(x) > 0$ บนช่วง $(-\infty, -1)$ และบนช่วง $(1, \infty)$

และ $f'(x) < 0$ บนช่วง $(-1, 1)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -1)$ และบนช่วง $(1, \infty)$

และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-1, 1)$

อย่าลืมนะครับช่วง $x > 1$ และ $x < -1$ ทำให้ $f'(x) > 0$ จึงใช้เครื่องหมาย + ส่วนช่วง $-1 < x < 1$ ทำให้ $f'(x) < 0$ จึงใช้เครื่องหมาย -



ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = 3 - 2x - x^2$ จงตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใด และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วงใด

วิธีทำ เริ่มต้นด้วยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f

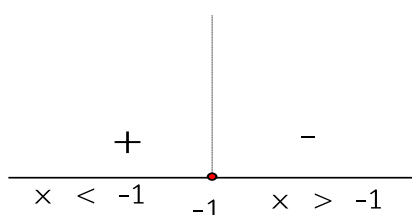
$$\text{จาก } f(x) = 3 - 2x - x^2$$

$$\text{จะได้ } f'(x) = -2 - 2x$$

$$= -2(1 + x)$$

ดึงตัวประกอบร่วม

ตรวจสอบค่าของ $f'(x)$ โดยเขียนเส้นจำนวนและจุดแบ่งช่วง ดังนี้



จะได้ว่า $f'(x) > 0$ บนช่วง $(-\infty, -1)$

และ $f'(x) < 0$ บนช่วง $(-1, \infty)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -1)$

และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-1, \infty)$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 2x - 3$ จงตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใด และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วงใด

วิธีทำ เริ่มต้นด้วยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f

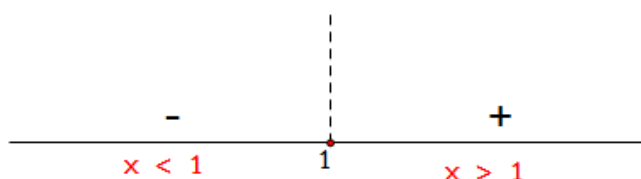
$$\text{จาก } f(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$\text{จะได้ } f'(x) = 2x - 2$$

$$= 2(x - 1)$$

ดึงตัวประกอบร่วม

ตรวจสอบค่าของ $f'(x)$ โดยเขียนเส้นจำนวนและจุดแบ่งช่วง ดังนี้



จะได้ว่า $f'(x) > 0$ บนช่วง $(-\infty, 1)$
และ $f'(x) < 0$ บนช่วง $(1, \infty)$
ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, 1)$
และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(1, \infty)$



แบบฝึกทักษะ 10.1

คำชี้แจง จงหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มและเป็นฟังก์ชันลด
(ข้อละ 2 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

$$1. \quad y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$$

[illegible]

$$2. \quad \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3$$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. $x^3 - 2x^2 - 4x + 7$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เล่ม 10 การประยุกต์ของ

4. $x^2 - x + 5$

วิธีทำ

5. $12 - 12x + x^3$

วิธีทำ

ใบความรู้ 10.2

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

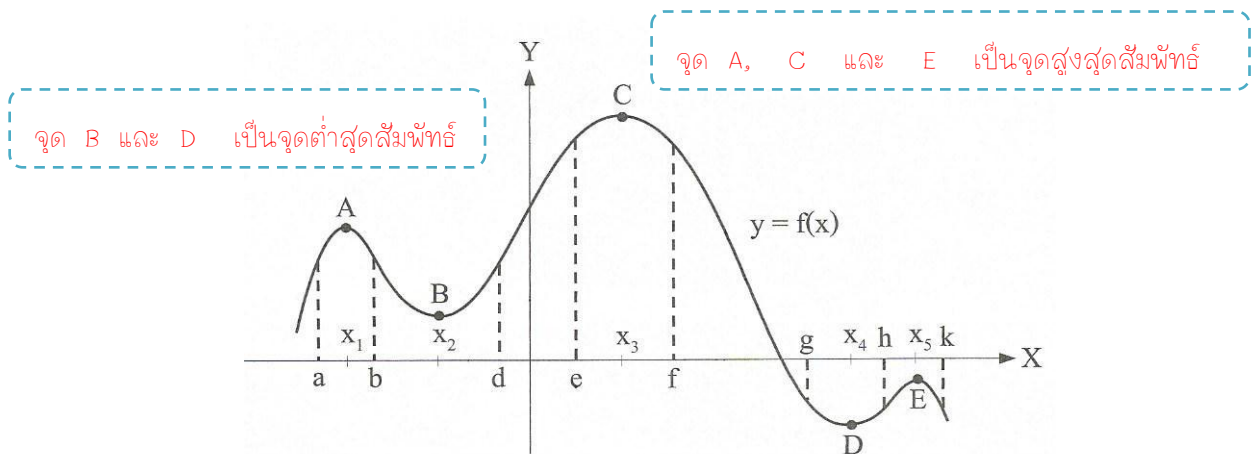
บทนิยาม ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ ถ้ามีช่วง $(a, b) \subset D_f$ ซึ่ง $c \in (a, b)$

และ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (a, b) เรียก $f(c)$ ว่า **ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** (relative maximum) ของฟังก์ชัน f และ **จุดสูงสุดสัมพัทธ์** คือ $(c, f(c))$

ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ ถ้ามีช่วง $(a, b) \subset D_f$ ซึ่ง $c \in (a, b)$

และ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (a, b) เรียก $f(c)$ ว่า **ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (relative minimum) ของฟังก์ชัน f และ **จุดต่ำสุดสัมพัทธ์** คือ $(c, f(c))$

พิจารณารูปของฟังก์ชันต่อไปนี้



ภาพที่ 10.4 แสดงจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ที่มา: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554: 116)

จากภาพที่ 10.4 จุด A, C และ E เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ ส่วนจุด B และจุด D เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ กล่าวคือ

ที่จุด A ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(x_1)$ เนื่องจากมีช่วง (a, b) ซึ่ง $x_1 \in (a, b)$ และ $f(x_1) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (a, b)

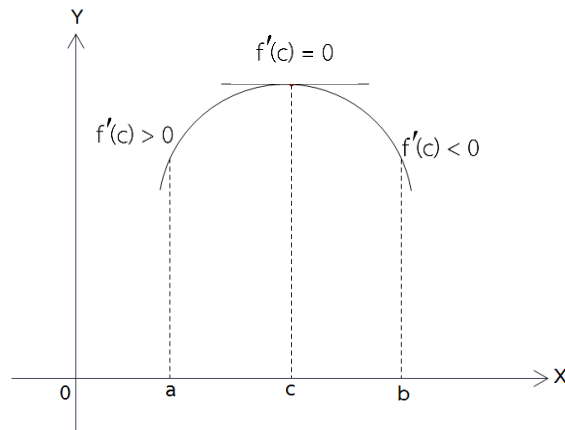
ที่จุด C ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(x_3)$ เนื่องจากมีช่วง (e, f) ซึ่ง $x_3 \in (e, f)$ และ $f(x_3) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (e, f)

ที่จุด E ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(x_5)$ เนื่องจากมีช่วง (h, k) ซึ่ง $x_5 \in (h, k)$ และ $f(x_5) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (h, k)

ที่จุด B ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(x_2)$ เนื่องจากมีช่วง (b, d) ซึ่ง $x_2 \in (b, d)$ และ $f(x_2) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (b, d)

ที่จุด D ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(x_4)$ เนื่องจากมีช่วง (g, h) ซึ่ง $x_4 \in (g, h)$ และ $f(x_4) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (g, h)

ต่อไปพิจารณาค่าสูงสุดสัมพัทธ์จากกราฟของฟังก์ชันในภาพที่ 10.5 ดังนี้



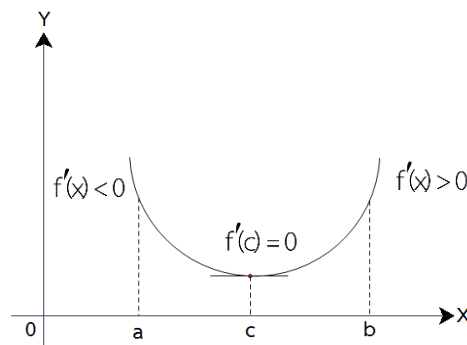
ภาพที่ 10.5 แสดงค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่ $x = c$

ที่มา: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554: 117)

จากภาพที่ 10.5 ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ จะเห็นว่ามีช่วง (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง (a, c) และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง (c, b)

ซึ่งกล่าวได้ว่า ถ้า $f'(x) > 0$ เมื่อ x น้อยกว่า c เล็กน้อย และ $f'(x) < 0$ เมื่อ x มากกว่า c เล็กน้อย แล้วฟังก์ชัน f จะมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ และสังเกตว่า $f'(c) = 0$

ในทำนองเดียวกัน พิจารณาค่าต่ำสุดสัมพัทธ์จากกราฟของฟังก์ชันในรูปที่ 6



ภาพที่ 10.6 แสดงค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่ $x = c$

ที่มา: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554: 117)

จากภาพที่ 10.6 ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ จะเห็นว่ามีช่วง (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง (a, c) และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง (c, b)

นั่นคือ ถ้า $f'(x) < 0$ เมื่อ x น้อยกว่า c เล็กน้อย และ $f'(x) > 0$ เมื่อ x มากกว่า c เล็กน้อย แล้วฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ และสังเกตว่า $f'(c) = 0$

ดังนั้น ถ้า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f และ $f'(c)$ หาค่าได้แล้ว $f'(c) = 0$

สรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

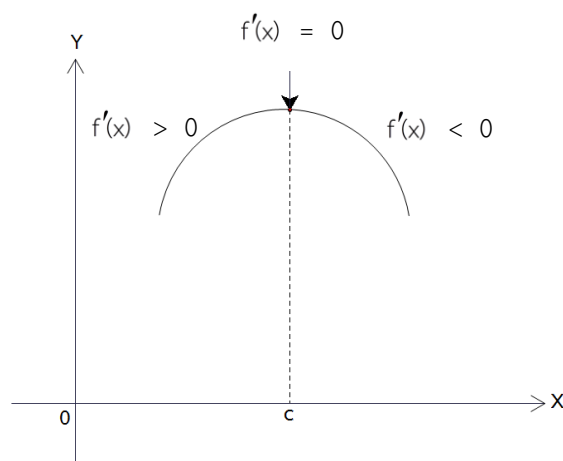
ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ $f'(c)$ หาค่าได้ ถ้า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f จะได้ว่า $f'(c) = 0$

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) ค่าของ $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = 0$ จะเรียกว่า **ค่าวิกฤต** (critical value) ของฟังก์ชัน f

หมายเหตุ ค่าวิกฤตของ f นี้ นอกจากจะเป็นค่าที่นำไปแทน x ใน $f'(x)$ แล้วทำให้ $f'(x)$ เป็นศูนย์ แล้วยังเรียกจำนวนจริง c ที่ทำให้ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้ว่าค่าวิกฤตด้วย ซึ่งในที่นี้จะไม่กล่าวถึงค่าวิกฤตแบบหลัง

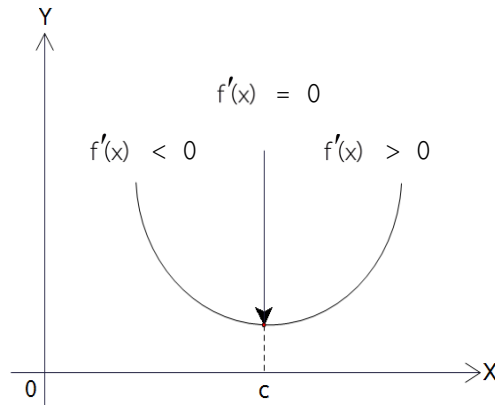
ในการหาค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ จึงต้องหาค่าวิกฤต c ที่ทำให้ $f'(c) = 0$ ก่อน หลังจากนั้นจึงพิจารณาว่าจุดที่ $x = c$ นั้นเป็นจุดแบ่งที่ทำให้ค่าของ $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนบวกเป็นจำนวนลบ หรือเปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวก เมื่อ x เพิ่มขึ้นรอบ ๆ c หรือไม่

ถ้าค่าของ $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนบวกเป็นจำนวนลบ แสดงว่า c เป็นค่าวิกฤตที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์นั้นคือ $f(c)$ ดังภาพที่ 10.7



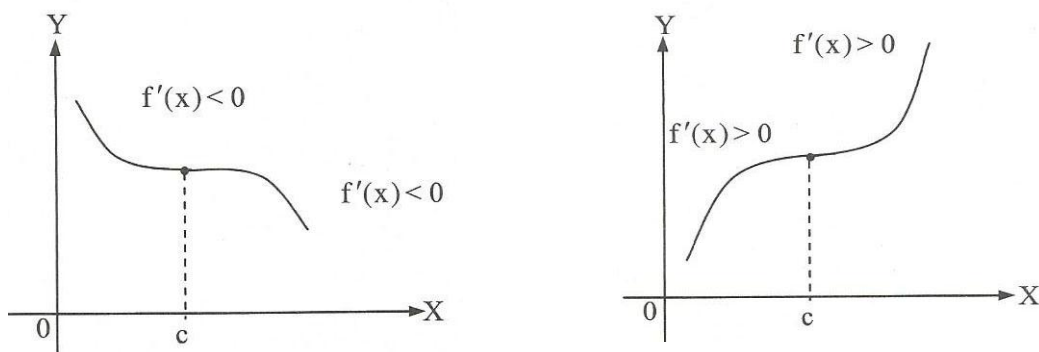
ภาพที่ 10.7 แสดงค่าของ $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนบวกเป็นจำนวนลบ
ที่มา: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554: 118)

ถ้าค่าของ $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวก แสดงว่า c เป็นค่าวิกฤตที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์นั้นคือ $f(c)$ ดังภาพที่ 10.8



ภาพที่ 10.8 แสดงค่าของ $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวก
ที่มา: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554: 118)

แต่ถ้าค่าของ $f'(x)$ ไม่มีการเปลี่ยนจากจำนวนบวกเป็นจำนวนลบหรือไม่มีการเปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวก แสดงว่า c เป็นค่าวิกฤตที่ไม่ได้ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ ดังภาพที่ 10.9



ภาพที่ 10.9 แสดงค่าของ $f'(x)$ ไม่มีการเปลี่ยนจากจำนวนบวกเป็นจำนวนลบหรือไม่มีการเปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวก

ที่มา: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554: 119)

ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ เป็นค่าวิกฤตของ f

ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนบวกเป็นจำนวนลบ เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นรอบ ๆ c แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวก เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นรอบ ๆ c แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 4x - 3$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 + 4x - 3$
 จะได้ $f'(x) = 2x + 4$
 ให้ $f'(x) = 0$ จะได้ $2x + 4 = 0$
 จะได้ $x = -2$
 ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f คือ -2
 ถ้าเราพิจารณาค่าของ $f'(x)$ จะได้ตารางดังนี้

	$f(x)$	$f'(x)$	สรุป
$x < -2$		จำนวนจริงลบ (-)	ฟังก์ชันลด
$x = -2$	-7	ศูนย์	ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$x > -2$		จำนวนจริงบวก (+)	ฟังก์ชันเพิ่ม

จากตารางจะได้ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(-2) = -7$ และไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$
 จะได้ $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$
 $= (3x - 1)(x - 1)$
 ให้ $f'(x) = 0$ จะได้ $(3x - 1)(x - 1) = 0$
 เพราะฉะนั้น $x = \frac{1}{3}$ หรือ $x = 1$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f มี 2 ค่า คือ $\frac{1}{3}$ และ 1

ถ้าเราพิจารณาค่าของ $f'(x)$ จะได้ตารางดังนี้

	$f(x)$	$f'(x)$	สรุป
$x < \frac{1}{3}$		จำนวนจริงบวก (+)	ฟังก์ชันเพิ่ม
$x = \frac{1}{3}$	$-\frac{23}{27}$	ศูนย์	ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$\frac{1}{3} < x < 1$		จำนวนจริงลบ (-)	ฟังก์ชันลด
$x = 1$	-1	ศูนย์	ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$x > 1$		จำนวนจริงบวก (+)	ฟังก์ชันเพิ่ม

จากตารางจะได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{23}{27}$ และ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(1) = -1$

จากที่กล่าวมาข้างต้น เป็นวิธีพิจารณาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยใช้อนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชันช่วยในการพิจารณา นอกจากนี้อาจใช้อนุพันธ์อันดับที่ 2 มาช่วยในการพิจารณาว่า ณ ค่าวิกฤตนั้น ๆ ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือไม่ โดยอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง A ใด ๆ และ c เป็นค่าวิกฤตของ f ซึ่ง

$$f'(c) = 0$$

1. ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
2. ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

จากทฤษฎีบทข้างต้น ถ้าทราบว่า $f''(c)$ เป็นจำนวนจริงบวกหรือจำนวนจริงลบ จะทำให้บอกได้ว่า $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ แต่ถ้าพบว่า $f''(c) = 0$ จะไม่สามารถสรุปได้ว่า $f(c)$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เพราะบางครั้ง $f(c)$ อาจเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือ $f(c)$ อาจเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือบางครั้ง $f(c)$ อาจไม่เป็นทั้งค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เลยก็ได้ ดังนั้นในกรณีที่อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชันหาค่าไม่ได้หรือเท่ากับศูนย์ ณ ค่าวิกฤต จะพิจารณาโดยใช้การเปลี่ยนแปลงค่าของอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชันที่จุดบริเวณใกล้เคียงค่าวิกฤตนั้น

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 4$

วิธีทำ

จาก $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 4$
 จะได้ $f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$
 $= (3x - 12)(x + 2)$
 ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ว่า $(3x - 12)(x + 2) = 0$
 เพราะฉะนั้น $x = 4$ หรือ $x = -2$
 ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ 4 และ -2

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

$$f''(4) = 6(4 - 1) = 18 \text{ ซึ่ง } 18 > 0$$

$$f''(-2) = 6(-2 - 1) = -18 \text{ ซึ่ง } -18 < 0$$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -2$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ

$$(-2)^3 - 3(-2)^2 - 24(-2) + 4 = 32$$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 4$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ

$$4^3 - 3(4)^2 - 24(4) + 4 = -76$$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$$

$$\text{จะได้ } f'(x) = 4x^3 - 16x$$

$$= 4x(x^2 - 4) = 4x(x - 2)(x + 2)$$

$$\text{ถ้า } f'(x) = 0 \text{ จะได้ว่า } 4x(x - 2)(x + 2) = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = -2$ หรือ $x = 0$ หรือ $x = 2$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ $-2, 0$ และ 2

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน

$$f''(x) = 12x^2 - 16 = 4(3x^2 - 4)$$

$$f''(-2) = 4(12 - 4) = 32 \text{ ซึ่ง } 32 > 0$$

$$f''(0) = 4(0 - 4) = -16 \text{ ซึ่ง } -16 < 0$$

$$f''(2) = 4(12 - 4) = 32 \text{ ซึ่ง } 32 > 0$$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ 12

และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -2$ และ $x = 2$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ 32

แบบฝึกทักษะ 10.2

คำชี้แจง จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้
(ข้อละ 2 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

1. $f(x) = x^3 - 12x$

วิธีทำ

2. $f(x) = 6 - x^2$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. $x^5 - 5x$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. $(x - 2)^2(x + 1)^2$

วิธีทำ

5. $f(x) = 2x^2 - x^4$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบความรู้ 10.3

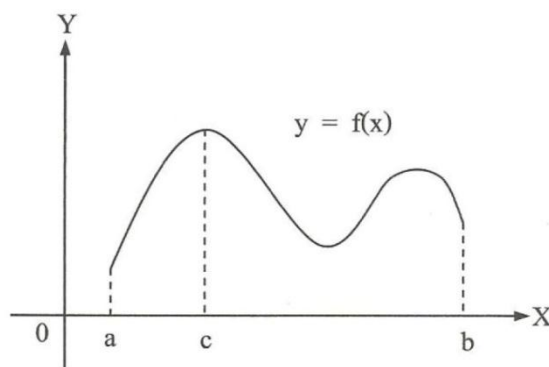
ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

เนื่องจากเมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ อาจหาค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันได้หลายค่า และอาจบอกได้ว่าค่าใดมากที่สุดหรือค่าใดน้อยที่สุด แต่ค่าดังกล่าวอาจไม่ใช่ค่ามากที่สุดหรือค่าน้อยที่สุด ในบรรดาค่าของ $f(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในโดเมนของ f จะเรียกค่าของ $f(x)$ ที่มากที่สุดสำหรับทุก x ที่อยู่ในโดเมนของ f ว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) และเรียกค่า $f(x)$ ที่น้อยที่สุดสำหรับทุก x ที่อยู่ในโดเมนของ f ว่าค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum) ซึ่งนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของ f

ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของ f

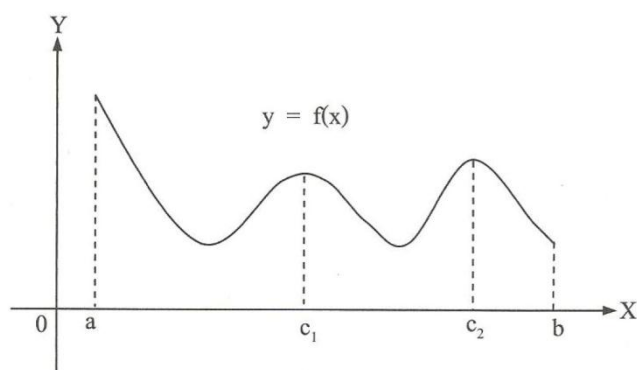
พิจารณารูปของฟังก์ชัน $y = f(x)$ โดยที่โดเมนของฟังก์ชัน คือ $D_f = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ ต่อไปนี้



ภาพที่ 10.10 แสดงค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$

ที่มา: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554: 122)

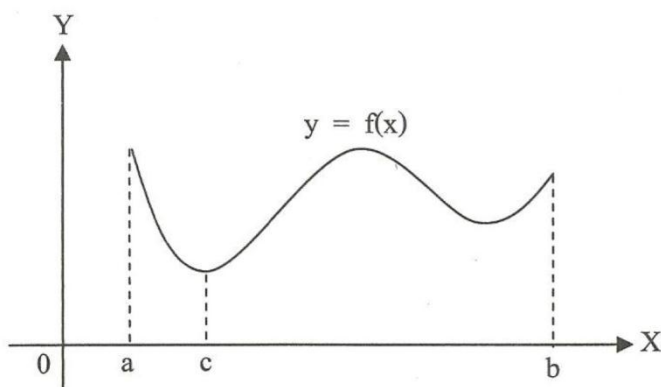
จากภาพที่ 10.10 ฟังก์ชัน $y = f(x)$ เมื่อ $D_f = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$ และ $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ค่าหนึ่งของฟังก์ชัน f ด้วย



ภาพที่ 10.11 แสดงค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = a$

ที่มา: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554: 122)

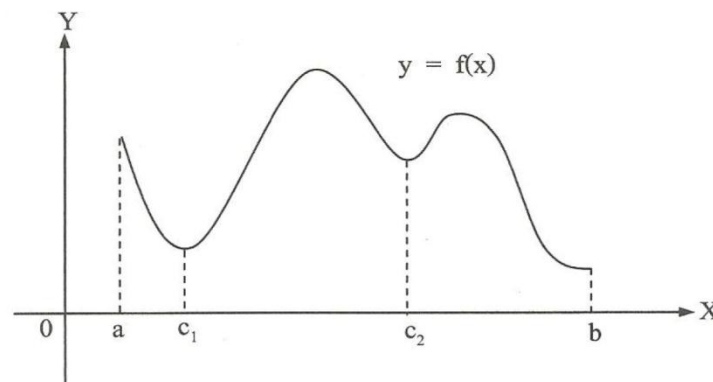
จากภาพที่ 10.11 ฟังก์ชัน $y = f(x)$ เมื่อ $D_f = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = a$ โดยมี $f(c_1)$ และ $f(c_2)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ แต่ $f(c_1)$ และ $f(c_2)$ ต่างก็ไม่ใช่ค่าสูงสุดสัมบูรณ์



ภาพที่ 10.12 แสดงค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$

ที่มา: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554: 123)

จากภาพที่ 10.12 ฟังก์ชัน $y = f(x)$ เมื่อ $D_f = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$ และ $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ค่าหนึ่งของฟังก์ชัน f ด้วย



ภาพที่ 10.13 แสดงค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = b$

ที่มา: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554: 123)

จากภาพที่ 10.13 ฟังก์ชัน $y = f(x)$ เมื่อ $D_f = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = b$ โดยมี $f(c_1)$ และ $f(c_2)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ แต่ $f(c_1)$ และ $f(c_2)$ ต่างก็ไม่ใช่ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

จากตัวอย่างข้างต้นที่กล่าวมา จะพบว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่โดเมนเป็นช่วงปิด $[a, b]$ ใด ๆ จะหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ได้เสมอ โดยที่บางฟังก์ชันค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์นั้นอาจเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ด้วยก็ได้ แต่บางฟังก์ชันค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์นั้นอาจเป็นค่าของฟังก์ชันที่จุดปลายของช่วงปิดนั้นก็ได้

ขั้นตอนของการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ถ้าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว สามารถหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f ตามขั้นตอนดังนี้

1. หาค่าวิกฤตทั้งหมดในช่วงปิด $[a, b]$
2. หาค่าของฟังก์ชัน ณ ค่าวิกฤตที่ได้จากข้อ 1
3. หาค่า $f(a)$ และ $f(b)$
4. เปรียบเทียบค่าที่ได้จากข้อ 2 และ ข้อ 3 ซึ่งจะทำให้ได้ข้อสรุปว่า
ค่ามากที่สุดจากข้อ 2 และ ข้อ 3 เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f
ค่าน้อยที่สุดจากข้อ 2 และ ข้อ 3 เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$ บนช่วงปิด $[-3, 4]$ จงหาค่าสูงสุด
สัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

$$= (x + 2)(x - 1)$$

ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ $(x + 2)(x - 1) = 0$

เพราะฉะนั้น $x = -2$ หรือ $x = 1$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงปิด $[-3, 4]$ คือ -2 และ 1

ต่อไปคำนวณหา $f(-3)$, $f(-2)$, $f(1)$ และ $f(4)$ จะได้

$$f(-2) = \frac{10}{3}$$

$$f(1) = -\frac{7}{6}$$

$$f(-3) = \frac{3}{2}$$

$$f(4) = \frac{64}{3}$$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 4$ ซึ่ง $f(4) = \frac{64}{3}$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 1$ ซึ่ง $f(1) = -\frac{7}{6}$

ข้อ 1 หาค่าวิกฤตทั้งหมดในช่วงปิด $[a, b]$

ข้อ 2 หาค่าของฟังก์ชัน ณ ค่าวิกฤตที่ได้จากข้อ 1

ข้อ 3 หาค่า $f(a)$ และ $f(b)$

ข้อ 4 ค่ามากที่สุดจากข้อ 2 และ 3 เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f

ข้อ 4 ค่าน้อยที่สุดจากข้อ 2 และ 3 เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f

ตัวอย่างที่ 9 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 4x - 5$ บนช่วงปิด $[-1, 3]$ จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 - 4x - 5$
 $f'(x) = 2x - 4$
 $= 2(x - 2)$

ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ $2(x - 2) = 0$

เพราะฉะนั้น $x = 2$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงปิด $[-1, 3]$ คือ 2

ต่อไปคำนวณหา $f(2)$, $f(-1)$, และ $f(3)$ จะได้

$f(2) = -9$

$f(-1) = 0$

$f(3) = -8$

ข้อ 1 หาค่าวิกฤตทั้งหมดในช่วงปิด $[a, b]$

ข้อ 2 หาค่าของฟังก์ชัน ณ ค่าวิกฤตที่ได้จากข้อ 1

ข้อ 3 หาค่า $f(a)$ และ $f(b)$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = -1$ ซึ่ง $f(-1) = 0$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 2$ ซึ่ง $f(2) = -9$

ข้อ 4 ค่ามากที่สุดจากข้อ 2 และ 3 เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f

ข้อ 4 ค่าน้อยที่สุดจากข้อ 2 และ 3 เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 1$ บนช่วงปิด $[-4, 2]$ จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ จาก } f(x) &= x^3 + x^2 - 8x - 1 \\ f'(x) &= 3x^2 + 2x - 8 \\ &= (3x - 4)(x - 2)\end{aligned}$$

$$\text{ถ้า } f'(x) = 0 \text{ จะได้ } (3x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x = \frac{4}{3}, -2$$

$$\text{ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงปิด } [-4, 2] \text{ คือ } \frac{4}{3}, -2$$

$$\text{ต่อไปคำนวณหา } f(-2), f\left(\frac{4}{3}\right), f(-4) \text{ และ } f(2) \text{ จะได้}$$

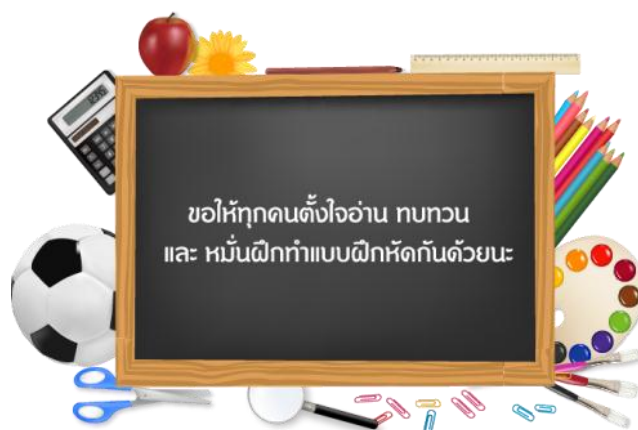
$$f(-2) = 11$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{203}{27}$$

$$f(-4) = -17$$

$$f(2) = -5$$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = -2$ ซึ่ง $f(-2) = 11$
และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = -4$ ซึ่ง $f(-4) = -17$



แบบฝึกทักษะ 10.3

คำชี้แจง จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้
(ข้อละ 2 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

1. $f(x) = 3x^2 - 10x + 7$ บนช่วง $[-1, 3]$

[illegible]

2. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ บนช่วง $[0, 2]$

บนช่วง $[0, 2]$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. $f(x) = 5 - 6x^2 - 2x^3$ บนช่วง $[-3, 1]$

บนช่วง $[-3, 1]$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. $f(x) = x^2 + 2x - 4$ บนช่วง $[-4, 3]$

วิธีทำ

5. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 27$ บนช่วง $[-2, 4]$

วิธีทำ

ใบความรู้ 10.4
โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดจะต้องพิจารณาเงื่อนไขของฟังก์ชันที่กำหนดให้ว่ามีโดเมนเป็นอย่างไร และปัญหาต้องการให้หาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

หลักเกณฑ์ทั่ว ๆ ไปในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

1. ทำความเข้าใจกับปัญหาอย่างละเอียดให้ทราบแน่นอนว่าต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของอะไร ให้กำหนดสิ่งนั้นเป็น y หรือตัวแปรอื่น ๆ ตามความเหมาะสมและควรวาดรูปประกอบ
2. สมมติให้ตัวแปร y เป็นตัวแปรที่มีการเปลี่ยนแปลงในปัญหา โดยที่ค่าของ y จะมีค่ามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับค่าของ x
3. เขียน y ในรูปตัวแปร x
4. หาค่า $\frac{dy}{dx}$ หรือ y' ซึ่งอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่า y ที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดเทียบกับตัวแปร x
5. ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$ แล้วแก้สมการหาค่า x ซึ่งคือค่าวิกฤตของฟังก์ชันในข้อ 3
6. นำค่าวิกฤตในข้อ 5 มาทำการตรวจสอบว่าทำให้ y มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดหรือไม่

ตัวอย่างที่ 9 จงหาจำนวนจริงบวก สองจำนวนซึ่งรวมกันเท่ากับ 20 และผลคูณของสองจำนวนมีค่ามากที่สุด

วิธีทำ

ให้จำนวนหนึ่งเป็น x
 ดังนั้นอีกจำนวนหนึ่งเป็น $20 - x$
 ให้ y เป็นผลคูณของสองจำนวน
 ดังนั้น $y = x(20 - x)$

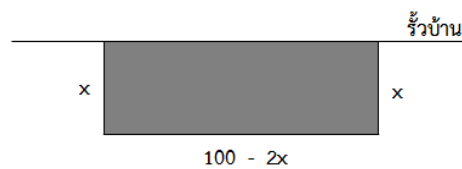
$$= 20x - x^2$$

$$y' = 20 - 2x$$

 ให้ $y' = 0$ จะได้ $20 - 2x = 0$
 เพราะฉะนั้น $x = 10$
 ดังนั้นค่าวิกฤต คือ 10
 จาก $y' = 20 - 2x$
 จะได้ $y'' = -2$
 เพราะฉะนั้น ถ้า $x = 10$ แล้ว $y'' = -2$ ซึ่ง $-2 < 0$
 แสดงว่า ถ้า $x = 10$ แล้ว y จะให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ซึ่งมีค่าเท่ากับ
 $10(20 - 10) = 100$
 ดังนั้นจำนวนจริงบวกสองจำนวนนั้น คือ 10 และ 10

ตัวอย่างที่ 10 ชายคนหนึ่งมีเชือกยาว 100 เมตร เขาต้องการนำเชือกเส้นนี้มาทำรั้วสำหรับเป็นคอกวัว โดยกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และใช้รั้วบ้านเป็นด้าน ๆ หนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมนี้จึงไม่ต้องขึงเชือกที่ด้านนี้ จงหาขนาดของรูปสี่เหลี่ยมซึ่งทำให้ได้พื้นที่คอกมามีค่ามากที่สุด

วิธีทำ ให้ y แทนพื้นที่คอกม้า
 x แทนความกว้างของคอกม้า
 จากโจทย์สามารถเขียนแผนภาพได้ดังนี้



$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } y &= x(100 - 2x) && \text{เมื่อ } 0 \leq x \leq 50 \\ &= 100x - 2x^2 \\ y' &= 100 - 4x \end{aligned}$$

ถ้า $y' = 0$ จะได้ $100 - 4x = 0$ หรือ $x = 25$

ดังนั้น ค่าวิกฤต คือ 25

$$\text{จาก } y' = 100 - 4x$$

$$\text{จะได้ } y'' = -4$$

เพราะฉะนั้น ถ้า $x = 25$ แล้ว $y'' = -4$ ซึ่ง $-4 < 0$

แสดงว่า ถ้า $x = 25$ แล้ว y จะให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$25(100 - 50) = 1250 \text{ ตารางเมตร}$$

ต่อไปจะพิจารณาที่จุดปลายช่วง

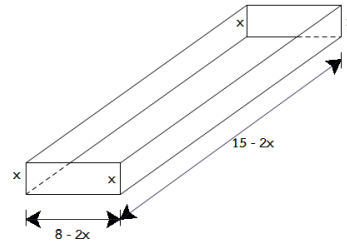
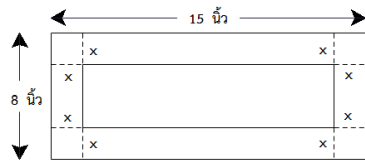
เมื่อ $x = 0$ จะได้ $y = 0$ และเมื่อ $x = 50$ จะได้ $y = 0$

แสดงว่า $x = 25$ จะเป็นค่าสูงสุดสมบูรณ์

ดังนั้น ถ้าต้องการให้คอกมามีพื้นที่มากที่สุด จะต้องให้ด้านกว้างมีขนาด 25 เมตร และด้านยาว 50 เมตร จึงจะทำให้พื้นที่มีค่ามากที่สุด



ตัวอย่างที่ 11 กระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 8×15 นิ้ว ถ้าตัดมุมทั้งสี่ของกระดาษ แล้วพับขึ้นเป็นกล่อง ดังรูป



จงหาว่า ถ้าต้องการปริมาตรของกล่องมากที่สุด จะต้องตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกด้านละเท่าไร

วิธีทำ ให้ $V(x)$ แทนปริมาตรของกล่องมีหน่วยเป็นลูกบาศก์นิ้ว
 x แทนความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ตัดออก
 จะเห็นว่า $0 \leq x \leq 4$
 ดังนั้น $V(x) =$ กว้าง $\times$ ยาว $\times$ สูง
 $= (8 - 2x)(15 - 2x)(x)$ เมื่อ $0 \leq x \leq 4$
 $= 4x^3 - 46x^2 + 120x$
 $V'(x) = 12x^2 - 92x + 120$
 $= 3x^2 - 23x + 30$
 $= (3x - 5)(x - 6)$
 ถ้า $V'(x) = 0$ จะได้ $(3x - 5)(x - 6) = 0$
 เพราะฉะนั้น $x = \frac{5}{3}$ หรือ $x = 6$
 เนื่องจาก $6 \notin [0, 4]$
 ดังนั้น ค่าวิกฤต คือ $\frac{5}{3}$
 จาก $V'(x) = 12x^2 - 92x + 120$
 จะได้ $V''(x) = 24x - 92$
 $V''\left(\frac{5}{3}\right) = 24\left(\frac{5}{3}\right) - 92 = -52 < 0$
 แสดงว่า ถ้า $x = \frac{5}{3}$ แล้ว $V(x)$ จะให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ซึ่งมีค่าเท่ากับ

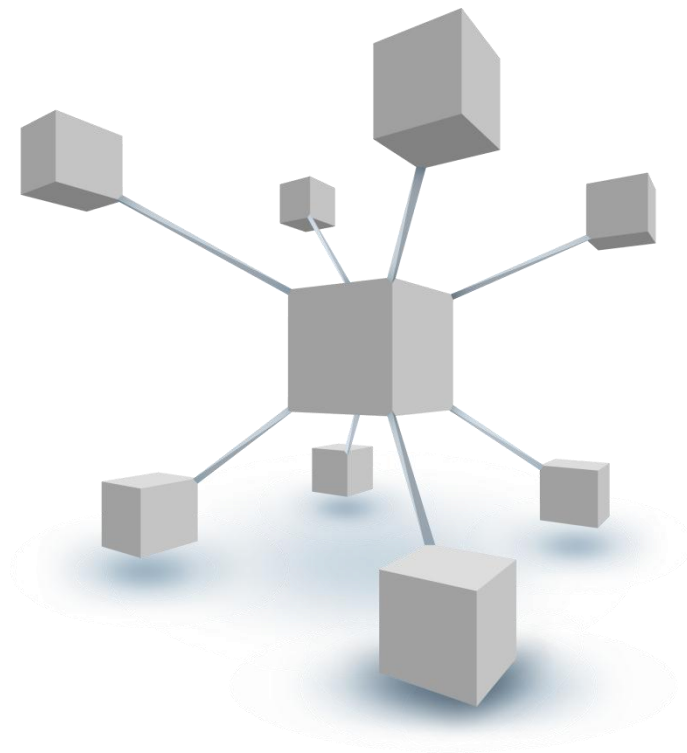
$$4\left(\frac{5}{3}\right)^3 - 46\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 120\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{2,450}{27} \text{ ลูกบาศก์นิ้ว}$$

ต่อไปจะพิจารณาที่จุดปลายช่วง

เมื่อ $x = 0$ จะได้ $V(0) = 0$ และเมื่อ $x = 4$ จะได้ $V(4) = 0$

แสดงว่า $x = \frac{5}{3}$ จะเป็นค่าสูงสุดสมบูรณ์

ดังนั้น ถ้า $x = \frac{5}{3}$ แล้วจะทำให้กล่องกระดาษมีปริมาตรมากที่สุดเป็น $\frac{2,450}{27}$ ลูกบาศก์นิ้ว



แบบฝึกทักษะ 10.4

คำชี้แจง จงแสดงวิธีทำ (ข้อละ 2 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

1. จงหาจำนวนเต็มบวกสองจำนวน ซึ่งผลบวกเท่ากับ 120 และทำให้ผลคูณของจำนวนหนึ่งกับกำลังสองของอีกจำนวนหนึ่งมีค่ามากที่สุด

[illegible]

2. กล่องกระต่ายมีฝาปิดใบหนึ่ง ด้านยาวยาวเป็นสองเท่าของด้านกว้าง และมีพื้นที่ผิวเท่ากับ 192 ตารางนิ้ว ถ้ากล่องใบนี้มีปริมาตรมากที่สุด จงหาขนาดของกล่องใบนี้

[illegible]

3. มีเงินอยู่ 900 บาท ต้องการล้อมรั้วที่ดิน ซึ่งมีด้านหนึ่งติดแม่น้ำ ให้ได้ที่ดินรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยไม่ล้อมฝั่งแม่น้ำ จะต้องล้อมให้แต่ละด้านยาวเท่าไร จึงจะได้เนื้อที่มากที่สุด ถ้าค่าล้อมรั้วด้านขนานกับแม่น้ำเท่ากับ 3 บาทต่อฟุต ค่าล้อมรั้วอีก 2 ด้านที่เหลือเท่ากับ 2 บาทต่อฟุต

[illegible]

4. พ่อค้าคนหนึ่งทราบว่าถ้าเขาตั้งราคาสินค้าอย่างหนึ่งขึ้นละ 20 บาท ใน 1 เดือน เขาจะขายสินค้าได้ 1,000 ชิ้น ถ้าเขาลดราคาลงขึ้นละ 1 บาท เขาจะขายสินค้าได้เพิ่มขึ้นเดือนละ 100 ชิ้น ถ้าเขาลดราคาลงขึ้นละ 2 บาท เขาจะขายสินค้าได้เพิ่มอีกเดือนละ 200 ชิ้น เป็นเช่นนี้เรื่อยไป อยากทราบว่าเขาควรจะต้องตั้งราคาสินค้าขึ้นละเท่าใดจึงจะได้เงินจากการขายมากที่สุด ใน 1 เดือน

[illegible]

5. ชายคนหนึ่งมีไม้ระแนงสำหรับทำรั้วได้ยาว 80 เมตร เขาต้องการล้อมบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า พร้อมทั้งกันเป็น 4 ช่องเท่า ๆ กันดังรูป

--	--	--	--

พื้นที่มากที่สุดเขาจะล้อมได้รวมทั้งสิ้นเท่าใด

[illegible]

แบบทดสอบหลังเรียน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

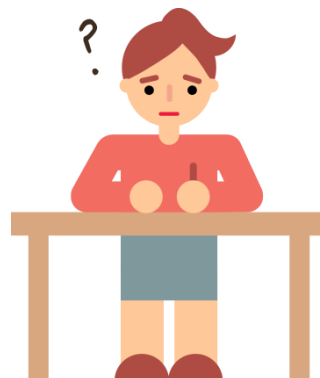
เล่ม 10 การประยุกต์ของอนุพันธ์

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกต้องที่สุด

1. พิจารณา $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$ เป็นฟังก์ชันลดช่วงใด
 - ก. $(-\infty, -2)$
 - ข. $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$
 - ค. $(-2, 1)$
 - ง. $(1, \infty)$
2. พิจารณา $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใด
 - ก. $(-\infty, -2)$
 - ข. $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$
 - ค. $(-2, 1)$
 - ง. $(1, \infty)$
3. กำหนดให้ $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 1$ พิจารณาว่าที่ $x = 2$ ฟังก์ชัน f มีลักษณะอย่างไร
 - ก. f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = 2 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = 0
 - ข. f จุดสูงสุดสัมพัทธ์ = 2 และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ = -15
 - ค. f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = 2 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = -15
 - ง. f จุดสูงสุดสัมพัทธ์ = 2 และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ = 0
4. กำหนดให้ $y = 7 + 4x - 2x^2$ จุดสูงสุดสัมพัทธ์และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันตรงกับข้อใด
 - ก. จุดสูงสุดสัมพัทธ์ = 9 และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ = 1
 - ข. จุดสูงสุดสัมพัทธ์ = 4 และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ = 23
 - ค. จุดสูงสุดสัมพัทธ์ = 1 และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ = 9
 - ง. จุดสูงสุดสัมพัทธ์ = 2 และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ = 7
5. กำหนดให้ $y = x^2 - 4x - 1$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันตรงกับข้อใด
 - ก. จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = 2 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = 5
 - ข. จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = 2 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = -5
 - ค. จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = -2 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = 5
 - ง. จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = -2 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = -5
6. กำหนดให้ $y = x^3 + 5x - 4$ จุดต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันตรงกับข้อใด
 - ก. จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = -1 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = -10
 - ข. จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = -3 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = -46
 - ค. จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = 3 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = -46
 - ง. จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ = 1 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = -10

7. พ่อค้าขายเสื้อยืดราคาตัวละ 25 บาท เขาจะขายได้วันละ 500 ตัว ถ้าเขาลดราคาขายลงอีกตัวละ x บาท เขาจะขายเสื้อยืดได้เพิ่มอีกวันละ $100x$ ตัว จงหาว่าเขาจะขายเสื้อยืดได้เงินมากที่สุดเขาต้องตั้งราคาขายตัวละเท่าไร
- 23
 - 20
 - 15
 - 10
8. นายแดงต้องการจะกั้นรอบที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าไว้ปลูกส้ม โดยใช้รั้วบ้านเป็นรั้วด้านหนึ่งของที่ดินแปลงนี้ ถ้าเขามีลวดหนามยาว 400 เมตร และต้องการล้อมรั้วให้ได้พื้นที่มากที่สุดนายแดงจะล้อมรั้วได้พื้นที่มากที่สุดกี่ตารางเมตร
- 40,000 ตารางเมตร
 - 30,000 ตารางเมตร
 - 25,000 ตารางเมตร
 - 20,000 ตารางเมตร
9. สามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มีด้านทั้งสามยาว 3 , 4 , 5 นิ้ว ตามลำดับ สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดสามารถบรรจุในสามเหลี่ยมนี้ได้ จะมีพื้นที่กี่ตารางนิ้ว
- 2 ตารางนิ้ว
 - 3 ตารางนิ้ว
 - 4 ตารางนิ้ว
 - 6 ตารางนิ้ว
10. แผ่นสังกะสีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 12 นิ้ว ต้องการทำเป็นกล่องข้างบนฝาเปิด โดยการตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกจากมุมทั้งสี่เท่า ๆ กัน แล้วพับส่วนที่เหลือขึ้นเป็นด้านข้างของกล่อง ถ้าปริมาตรของกล่องนี้มีค่ามากที่สุด ถามว่าความยาวของด้าน สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ตัดออกจะเป็นเท่าใด
- 5 นิ้ว
 - 4 นิ้ว
 - 2 นิ้ว
 - 1 นิ้ว



กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
เล่ม 10 การประยุกต์ของอนุพันธ์

ชื่อ.....ชั้น..... เลขที่.....
โรงเรียนบ้านไร่วิทยา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	ความก้าวหน้า	คิดเป็นร้อยละ
การทดสอบก่อนเรียน	10			
การทดสอบหลังเรียน	10			



แบบบันทึกความก้าวหน้าของแบบฝึกทักษะ
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
เล่ม 10 การประยุกต์ของอนุพันธ์

ชื่อ.....ชั้น..... เลขที่.....
โรงเรียนบ้านไร่วิทยา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

แบบฝึกทักษะที่	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	คิดเป็นร้อยละ	ผ่านเกณฑ์*	ไม่ผ่านเกณฑ์**
10.1	10				
10.2	10				
10.3	10				
10.4	10				
รวมทั้งหมด	40				
เฉลี่ย					
คิดเป็นร้อยละ					

* ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
 ** ไม่ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนน้อยกว่าร้อยละ 80 ของคะแนนเต็ม



บรรณานุกรม

- กนกวลี อุษณกรกุล และรณชัย มาเจริญทรัพย์. (2548). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด. (2554). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- กมลเอก ไทยเจริญ. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.
- กานดา ลือสุขธิวิบูลย์ และยุพิน จิรสุขานนท์. (2548). **สรุปคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ม. 4 – 5 – 6 รายวิชาพื้นฐานและรายวิชาเพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์ Pure Pure ม.6 (2 ภาคเรียน) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ Entrance คณิตศาสตร์ 15 พ.ศ.**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด.
- เชษฐ ชื่นสกุลดี. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ PAT 1 ความถนัดทางคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: ห้างหุ้นส่วนจำกัดรุ่งเรืองสาส์นการพิมพ์.
- ณรงค์ ปั่นนิ่ม และคณะ. (2537). **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์รวม ม.4-5-6**. กรุงเทพฯ: ภูมิบัณฑิตการพิมพ์ จำกัด.
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2**. กรุงเทพฯ: แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด.
- ประชา ศิวเวทกุล. (2555). **กฏแจกคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 รายวิชาเพิ่มเติม เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- เลิศ สิทธิโกศล. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์แผนใหม่ แคลคูลัส ม.ปลาย 4-5-6**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ แมสพับลิชชิง.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว. (2554). **คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สมัย เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.4-5-6 สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด. (ม.ป.ป.). **Mathematics Problems โจทย์คณิตศาสตร์ ม. 4-5-6**. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.
- สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพรรณ เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน + เพิ่มเติม เล่มที่ 6 ช่วงชั้นที่ 4 (มัธยมศึกษาปีที่ 4-6)**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาติบุตร. (2556). แคลคูลัส Calculus 1

ฉบับเสริมประสบการณ์. กรุงเทพฯ: บริษัทพิมพ์ดีการพิมพ์ จำกัด.

สุเทพ จันทรสมศักดิ์. (ม.ป.ป.). คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015.

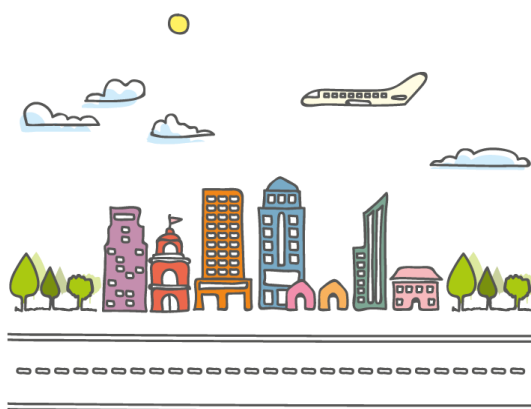
กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ภูมิบัณฑิต.

อเนก หิรัญ. (2544). คณิตศาสตร์ ม.6 ค 015. กรุงเทพฯ: หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์ เซ็นเตอร์.

_____. (ม.ป.ป.). แบบฝึกหัดพื้นฐาน วิชาคณิตศาสตร์ ม.6 ค 015. กรุงเทพฯ:

หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

Finney, Ross L. and other. (2007). Calculus Graphical, Numerical, Algebraic
Third Edition. Upper Saddle River. New Jersey: Prentice Hall.



ภาคผนวก

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อ	คำตอบ
1	ง
2	ก
3	ค
4	ก
5	ก
6	ง
7	ข
8	ก
9	ค
10	ข

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ	คำตอบ
1	ค
2	ข
3	ค
4	ค
5	ข
6	ข
7	ค
8	ง
9	ข
10	ค

เฉลยแบบฝึกทักษะ 10.1

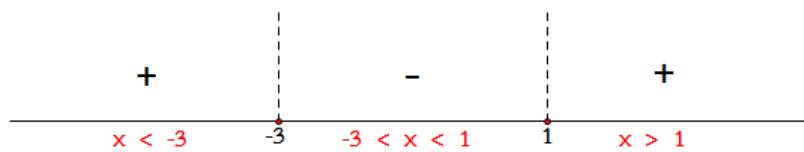
1. $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$

จะได้ $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$= (3x + 9)(x - 1)$

ตรวจสอบค่าของ $f'(x)$ โดยเขียนเส้นจำนวนและจุดแบ่งช่วง ดังนี้



จะได้ว่า $f'(x) > 0$ บนช่วง $(-\infty, -3)$ และบนช่วง $(1, \infty)$

และ $f'(x) < 0$ บนช่วง $(-3, 1)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -3)$ และบนช่วง $(1, \infty)$

และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-3, 1)$

$$2. \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3$$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } f'(x) &= x^2 - 2x - 3 \\ &= (x - 3)(x + 1) \end{aligned}$$

ตรวจสอบค่าของ $f'(x)$ โดยเขียนเส้นจำนวนและจุดแบ่งช่วง ดังนี้



จะได้ว่า $f'(x) > 0$ บนช่วง $(-\infty, -1)$ และบนช่วง $(3, \infty)$

และ $f'(x) < 0$ บนช่วง $(-1, 3)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -1)$ และบนช่วง $(3, \infty)$

และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-1, 3)$

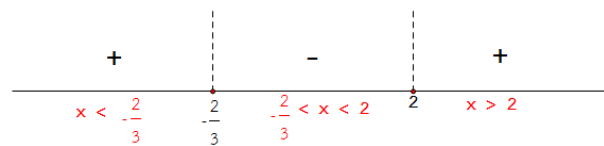
$$3. \quad x^3 - 2x^2 - 4x + 7 - \frac{2}{3}$$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7$

จะได้ $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$

$$= (3x + 2)(x - 2)$$

ตรวจสอบค่าของ $f'(x)$ โดยเขียนเส้นจำนวนและจุดแบ่งช่วง ดังนี้



จะได้ว่า $f'(x) > 0$ บนช่วง $(-\infty, -\frac{2}{3})$ และบนช่วง $(2, \infty)$

และ $f'(x) < 0$ บนช่วง $(-\frac{2}{3}, 2)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -\frac{2}{3})$ และบนช่วง $(2, \infty)$

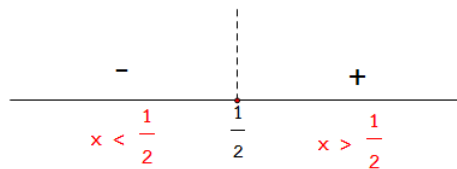
และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\frac{2}{3}, 2)$

4. $x^2 - x + 5$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 - x + 5$

จะได้ $f'(x) = 2x - 1$

ตรวจสอบค่าของ $f'(x)$ โดยเขียนเส้นจำนวนและจุดแบ่งช่วง ดังนี้



จะได้ว่า $f'(x) > 0$ บนช่วง $(\frac{1}{2}, \infty)$

และ $f'(x) < 0$ บนช่วง $(-\infty, \frac{1}{2})$

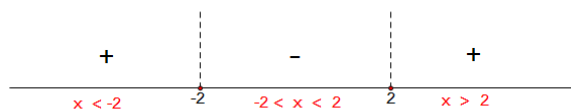
ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(\frac{1}{2}, \infty)$

และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, \frac{1}{2})$

5. $12 - 12x + x^3$

วิธีทำ จาก $f(x) = 12 - 12x + x^3$
 จะได้ $f'(x) = -12 + 3x^2$
 $= -3(4 - x^2)$
 $= -3(2 - x)(2 + x)$

ตรวจสอบค่าของ $f'(x)$ โดยเขียนเส้นจำนวนและจุดแบ่งช่วง ดังนี้



จะได้ว่า $f'(x) > 0$ บนช่วง $(-\infty, -2)$ และบนช่วง $(2, \infty)$

และ $f'(x) < 0$ บนช่วง $(-2, 2)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -2)$ และบนช่วง $(2, \infty)$

และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-2, 2)$

เฉลยแบบฝึกทักษะ 10.2

1. $f(x) = x^3 - 12x$

วิธีทำ

จาก $f(x) = x^3 - 12x$

จะได้ $f'(x) = 3x^2 - 12$

$$= 3(x^2 - 4)$$

$$= 3(x - 2)(x + 2)$$

ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ว่า $3(x - 2)(x + 2) = 0$

เพราะฉะนั้น $x = -2$ หรือ $x = 2$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ -2 และ 2

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(-2) = 6(-2) = -12 \text{ ซึ่ง } -12 < 0$$

$$f''(2) = 6(2) = 12 \text{ ซึ่ง } 12 > 0$$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -2$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ 16

และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 2$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ -16

$$2. f(x) = 6 - x^2$$

วิธีทำ จาก $f(x) = 6 - x^2$
 จะได้ $f'(x) = -2x$
 ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ว่า $x = 0$
 ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ 0
 ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน
 $f''(x) = -2$
 $f''(0) = -2 =$ ซึ่ง $-2 < 0$
 ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ 6
 และ f ไม่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

3. $x^5 - 5x$

วิธีทำ

จาก $f(x) = x^5 - 5x$

จะได้ $f'(x) = 5x^4 - 5$

ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ว่า $5x^4 - 5 = 0$

เพราะฉะนั้น $x = -1$ หรือ 1

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ -1 และ 1

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน

$$f''(x) = 20x^3$$

$$f''(-1) = -20 = \text{ซึ่ง } -20 < 0$$

$$f''(1) = 20 = \text{ซึ่ง } 20 > 0$$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ 4

และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ -4

4. $(x - 2)^2(x + 1)^2$

วิธีทำ

จาก $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)^2$

จะได้ $f'(x) = (x - 2)^2 \frac{d}{dx}(x + 1)^2 + (x + 1)^2 \frac{d}{dx}(x - 2)^2$

$$= (x - 2)^2(2)(x + 1) + (x + 1)^2(2)(x - 2)$$

$$= 2(x - 2)(x + 1)[(x - 2) + (x + 1)]$$

$$= 2(x - 2)(x + 1)(2x - 1)$$

ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ว่า $2(x - 2)(x + 1)(2x - 1) = 0$

เพราะฉะนั้น $x = -1$ หรือ $\frac{1}{2}$ หรือ 2

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ $-1, \frac{1}{2}$ และ 2

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน

จาก $f'(x) = 2(x - 2)(x + 1)(2x - 1)$

$$= 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4$$

จะได้ $f''(x) = 12x^2 - 12x - 6$

$$f''(-1) = 12(-1)^2 - 12(-1) - 6 = 18 \quad \text{ซึ่ง } 18 > 0$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{2}\right) - 6 = -9 \quad \text{ซึ่ง } -9 < 0$$

$$f''(2) = 12(2)^2 - 12(2) - 6 = 18 \quad \text{ซึ่ง } 18 > 0$$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = \frac{1}{2}$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $\frac{81}{16}$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$ และ $x = 2$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ 0

$$5. f(x) = 2x^2 - x^4$$

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = 2x^2 - x^4$$

$$\text{จะได้ } f'(x) = 4x - 4x^3$$

$$= 4x(1 - x^2)$$

$$= 4x(1 - x)(1 + x)$$

$$\text{ถ้า } f'(x) = 0 \quad \text{จะได้ว่า } 4x(1 - x)(1 + x) = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = -1, 0$ หรือ 1

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชันคือ -1 และ 1

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน

$$f''(x) = 4 - 12x^2$$

$$f''(-1) = 4 - 12(-1)^2 = -8 \quad \text{ซึ่ง } -8 < 0$$

$$f''(0) = 4 - 12(0)^2 = 4 \quad \text{ซึ่ง } 4 > 0$$

$$f''(1) = 4 - 12(1)^2 = -8 \quad \text{ซึ่ง } -8 < 0$$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$ และ $x = 1$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ 1

และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ 0

เฉลยแบบฝึกทักษะ 10.3

1. $f(x) = 3x^2 - 10x + 7$ บนช่วง $[-1, 3]$

วิธีทำ จาก $f(x) = 3x^2 - 10x + 7$

$$f'(x) = 6x - 10$$

ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ $6x - 10 = 0$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{5}{3}$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงปิด $[-1, 3]$ คือ $\frac{5}{3}$

ต่อไปคำนวณหา $f(-1)$, $f\left(\frac{5}{3}\right)$ และ $f(3)$ จะได้

$$f(-1) = 20$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

$$f(3) = 4$$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = -1$ ซึ่ง $f(-1) = 20$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = \frac{5}{3}$ ซึ่ง $f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{4}{3}$

$$2. f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 \quad \text{บนช่วง } [0, 2]$$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

$$f'(x) = 4x^3 - 10x$$

$$= 2x(2x^2 - 5)$$

ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ $2x(2x^2 - 5) = 0$

เพราะฉะนั้น $x = 0, \sqrt{\frac{5}{2}}, -\sqrt{\frac{5}{2}}$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงปิด $[0, 2]$ คือ $-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0, \sqrt{\frac{5}{2}}$ และ 2

ต่อไปคำนวณหา $f\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right), f(0)$, และ $f\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ จะได้

$$f\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -\frac{9}{4}$$

$$f(0) = 4$$

$$f\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -\frac{9}{4}$$

$$f(2) = 0$$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 0$ ซึ่ง $f(0) = 4$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ และ $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$$\text{ซึ่ง } f\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -\frac{9}{4}$$

3. $f(x) = 5 - 6x^2 - 2x^3$ บนช่วง $[-3, 1]$

วิธีทำ จาก $f(x) = 5 - 6x^2 - 2x^3$

$$f'(x) = -12x - 6x^2$$

$$= -6x(2 + x)$$

ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ $-6x(2 + x) = 0$

เพราะฉะนั้น $x = -2, 0$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงปิด $[-3, 1]$ คือ 0 และ -2

ต่อไปคำนวณหา $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$ และ $f(1)$ จะได้

$$f(-3) = 5$$

$$f(-2) = -3$$

$$f(0) = 5$$

$$f(1) = -3$$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = -3$ และ $x = 0$ ซึ่ง $f(-3) = 5 = f(0)$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = -2$ และ $x = 1$ ซึ่ง $f(-2) = -3 = f(1)$

4. $f(x) = x^2 + 2x - 4$ บนช่วง $[-4, 3]$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 + 2x - 4$

$$f'(x) = 2x + 2$$

$$= 2(x + 1)$$

ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ $2(x + 1) = 0$

เพราะฉะนั้น $x = -1$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงปิด $[-4, 3]$ คือ 1

ต่อไปคำนวณหา $f(-4)$, $f(1)$, และ $f(3)$ จะได้

$$f(-4) = 4$$

$$f(1) = -1$$

$$f(3) = 11$$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 3$ ซึ่ง $f(3) = 11 =$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 1$ ซึ่ง $f(1) = -1$

$$5. f(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 27 \quad \text{บนช่วง } [-2, 4]$$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 27$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 18x$$

$$= 2x(2x + 3)(x - 3)$$

$$\text{ถ้า } f'(x) = 0 \text{ จะได้ } 2x(2x + 3)(x - 3) = 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x = 0, -\frac{3}{2}, 3$$

$$\text{ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงปิด } [-2, 4] \text{ คือ } -\frac{3}{2}, 0 \text{ และ } 3$$

$$\text{ต่อไปคำนวณหา } f(-2), f\left(-\frac{3}{2}\right), f(0), f(3) \text{ และ } f(4) \text{ จะได้}$$

$$f(-2) = 23$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 18\frac{9}{16}$$

$$f(0) = 27$$

$$f(3) = -27$$

$$f(4) = 11$$

$$\text{สรุปได้ว่า } f \text{ มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ } x = 0 \text{ ซึ่ง } f(0) = 27$$

$$\text{และ } f \text{ มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ } x = 3 \text{ ซึ่ง } f(3) = -27$$

เฉลยแบบฝึกทักษะ 10.4

1. จงหาจำนวนเต็มบวกสองจำนวน ซึ่งผลบวกเท่ากับ 120 และทำให้ผลคูณของจำนวนหนึ่งกับกำลังสองของอีกจำนวนหนึ่งมีค่ามากที่สุด

วิธีทำ ให้จำนวนหนึ่งเป็น x

ดังนั้นอีกจำนวนหนึ่งเป็น $120 - x$

ให้ y เป็นผลคูณของสองจำนวน

$$\text{ดังนั้น } y = (120 - x)x^2$$

$$= 120x^2 - x^3$$

$$y' = 240x - 3x^2$$

$$= 3x(80 - x)$$

$$\text{ให้ } y' = 0 \quad \text{จะได้ } 3x(80 - x) = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = 0$ หรือ $x = 80$

ดังนั้นค่าวิกฤต คือ 0 และ 80

$$\text{จาก } y' = 240x - 3x^2$$

$$\text{จะได้ } y'' = 240 - 6x$$

เพราะฉะนั้น ถ้า $x = 0$ แล้ว $y'' = 240$ ซึ่ง $240 > 0$

และ ถ้า $x = 80$ แล้ว $y'' = -240$ ซึ่ง $-240 < 0$

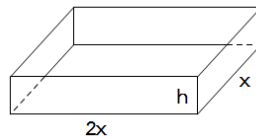
แสดงว่า ถ้า $x = 80$ แล้ว y จะให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$(120 - 80)(80)^2 = 256,000$$

ดังนั้นจำนวนจริงบวกสองจำนวนนั้น คือ 80 และ 40

2. กล่องกระดาษมีฝาปิดใบหนึ่ง ด้านยาวยาวเป็นสองเท่าของด้านกว้าง และมีพื้นที่ผิวเท่ากับ 192 ตารางนิ้ว ถ้ากล่องใบนี้มีปริมาตรมากที่สุด จงหาขนาดของกล่องใบนี้

วิธีทำ ให้ $V(x)$ แทนปริมาตรของกล่อง, x แทนความกว้างของกล่องกระดาษ
 h แทนความสูงของกล่องกระดาษ
 จากโจทย์ ความยาวของกล่องกระดาษ คือ $2x$ ดังรูป



$$\begin{aligned} \text{จะได้ } V(x) &= (2x) \cdot x \cdot h \\ V(x) &= 2x^2 h \end{aligned} \quad \text{-----(1)}$$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก พื้นที่ผิวของกล่อง} &= \text{พื้นที่ผิวข้าง} + 2\text{เท่าของพื้นที่ฐาน} \\ 192 &= (\text{เส้นรอบฐาน} \times \text{สูง}) + 2(2x)(x) \\ 192 &= 6xh + 4x^2 \\ h &= \frac{192 - 4x^2}{6x} \\ h &= \frac{32}{x} - \frac{2x}{3} \end{aligned}$$

แทน h ใน (1) จะได้

$$\begin{aligned} V(x) &= 2x^2 \left(\frac{32}{x} - \frac{2x}{3} \right) \\ &= 64x - \frac{4}{3}x^3 \\ V'(x) &= 64 - 4x^2 \end{aligned}$$

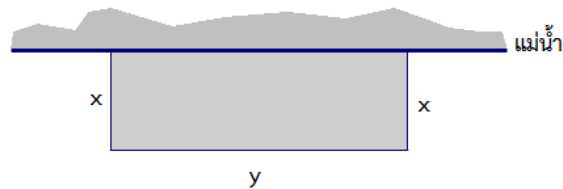
$$\text{ให้ } V'(x) = 0 \text{ จะได้ } 64 - 4x^2 = 0$$

$$\text{จะได้ } x = 4 \text{ ดังนั้น } h = \frac{32}{4} - \frac{2(4)}{3} = \frac{16}{3}$$

ดังนั้น กล่องใบนี้มีปริมาตรมากที่สุด เมื่อกว้าง 4 นิ้ว ยาว 8 นิ้ว และสูง $\frac{16}{3}$ นิ้ว

3. มีเงินอยู่ 900 บาท ต้องการล้อมรั้วที่ดิน ซึ่งมีด้านหนึ่งติดแม่น้ำ ให้ได้ที่ดินรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยไม่ล้อมฝั่งแม่น้ำ จะต้องล้อมให้แต่ละด้านยาวเท่าไร จึงจะได้เนื้อที่มากที่สุด ถ้าค่าล้อมรั้วด้านขนานกับแม่น้ำเท่ากับ 3 บาทต่อฟุต ค่าล้อมรั้วอีก 2 ด้านที่เหลือเท่ากับ 2 บาทต่อฟุต

วิธีทำ จากโจทย์ ให้ด้านขนานกับแม่น้ำยาว y ฟุต และด้านที่เหลือยาว x ฟุต ดังรูป



ให้ A แทนพื้นที่ที่ล้อมรั้ว จะได้

$$A = xy \quad \text{-----(1)}$$

$$\text{ค่าล้อมรั้วทั้งหมด} = 2(2x) + 3y$$

$$900 = 4x + 3y$$

$$y = \frac{900 - 4x}{3}$$

$$= 300 - \frac{4}{3}x$$

แทน y ใน (1) จะได้

$$A = x \left(300 - \frac{4}{3}x \right)$$

$$= 300x - \frac{4}{3}x^2$$

$$\frac{dA}{dx} = 300 - \frac{8}{3}x$$

$$\text{เนื่องจาก } A \text{ จะมากที่สุด เมื่อ } \frac{dA}{dx} = 0 \text{ จะได้ } 300 - \frac{8}{3}x = 0$$

$$\text{จะได้ } x = \frac{900}{8} = 112.5 \text{ ฟุต} \quad \text{ดังนั้น } y = 150 \text{ ฟุต}$$

นั่นคือ จะต้องล้อมรั้วให้ด้านที่ติดแม่น้ำยาว 150 ฟุต ส่วนด้านที่เหลือยาวด้านละ 112.5 ฟุต

4. พ่อค้าคนหนึ่งทราบว่าถ้าเขาตั้งราคาสินค้าอย่างหนึ่งขึ้นละ 20 บาท ใน 1 เดือน เขาจะขายสินค้าได้ 1,000 ชิ้น ถ้าเขาลดราคาลงขึ้นละ 1 บาท เขาจะขายสินค้าได้เพิ่มขึ้นเดือนละ 100 ชิ้น ถ้าเขาลดราคาลงขึ้นละ 2 บาท เขาจะขายสินค้าได้เพิ่มอีกเดือนละ 200 ชิ้น เป็นเช่นนี้เรื่อยไป อยากทราบว่าเขาควรจะต้องตั้งราคาสินค้าขึ้นละเท่าใดจึงจะได้เงินจากการขายมากที่สุดใน 1 เดือน

วิธีทำ สมมติให้เขาตั้งราคาขาย โดยลดราคาลงขึ้นละ x บาท

ดังนั้น ราคาขายสินค้าขึ้นละ $20 - x$ บาท

เขาขายสินค้าได้เพิ่มขึ้นเดือนละ $100x$ ชิ้น

แสดงว่า เขาขายสินค้าได้เดือนละ $1,000 + 100x$

สมมติให้ y แทนเงินที่ได้จากการขายใน 1 เดือน

$$\text{ดังนั้น } y = (1,000 + 100x)(20 - x)$$

$$= 20,000 + 1,000x - 100x^2$$

$$= 1,000 - 200x$$

$$y' = 1,000 - 200x$$

$$\text{ให้ } y' = 0 \text{ จะได้ } 1,000 - 200x = 0 \quad \text{จะได้ } x = 5$$

ดังนั้น ค่าวิกฤต คือ 5

$$\text{จาก } y' = 1,000 - 200x$$

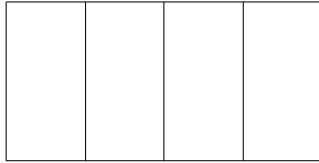
$$y'' = -200$$

เพราะฉะนั้น ถ้า $x = 0$ แล้ว $y'' = 240$ ซึ่ง $240 > 0$

และ ถ้า $x = 5$ แล้ว $y'' = -200$ ซึ่ง $-200 < 0$

นั่นคือ ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 5$ และ $f(5) = 22,500$

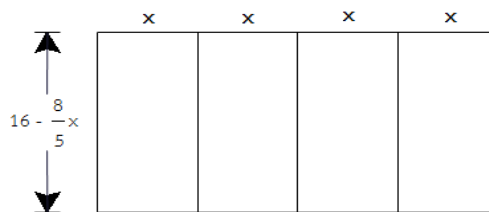
5. ชายคนหนึ่งมีไม้ระแนงสำหรับทำรั้วได้ยาว 80 เมตร เขาต้องการล้อมบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้าพร้อมทั้งกันเป็น 4 ช่องเท่า ๆ กันดังรูป



พื้นที่มากที่สุดเขาจะล้อมได้รวมทั้งสิ้นเท่าใด

วิธีทำ สมมติให้ความกว้างในแนวนอนของแต่ละช่องเป็น x เมตร

จะได้ ความยาวในแนวตั้งเป็น $\left(\frac{80 - 8x}{5} \right) = 16 - \frac{8}{5}x$ เมตร ดังรูป



สมมติให้ A แทนพื้นที่ทั้งหมด

$$\text{จากรูป จะได้ } A = 4(x) \left(16 - \frac{8}{5}x \right) = 64x - \frac{32}{5}x^2$$

$$A' = 64 - \frac{64}{5}x$$

$$\text{ให้ } A' = 0 \text{ จะได้ } 64 - \frac{64}{5}x = 0 \text{ จะได้ } x = 5$$

ดังนั้น ค่าวิกฤต คือ 5

$$\text{จาก } A' = 64 - \frac{64}{5}x$$

$$A'' = -\frac{64}{5}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น ถ้า } x = 5 \text{ แล้ว } A'' = -\frac{64}{5} \text{ ซึ่ง } -\frac{64}{5} < 0$$

นั่นคือ ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 5$ และ $A(5) = 160$ ตารางเมตร