

คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของหน่วยการเรียนรู้เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ประกอบด้วยแบบฝึกทักษะทั้งหมด 10 เล่ม ดังนี้

- เล่ม 1 ลิมิตของฟังก์ชัน
- เล่ม 2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน
- เล่ม 3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
- เล่ม 4 อัตราการเปลี่ยนแปลง
- เล่ม 5 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
- เล่ม 6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร
- เล่ม 7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ
- เล่ม 8 ความชันของเส้นโค้ง
- เล่ม 9 อนุพันธ์อันดับสูง
- เล่ม 10 การประยุกต์ของอนุพันธ์

โดยในแบบฝึกทักษะแต่ละเล่ม ประกอบด้วยผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ครอบคลุมทั้งด้านความรู้ ด้านทักษะกระบวนการและด้านคุณลักษณะ ซึ่งกิจกรรมของแบบฝึกทักษะแต่ละเล่มเสร็จสมบูรณ์ในตัวเอง ผู้เรียนสามารถใช้ได้ด้วยตนเอง

สำหรับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่ม 9 อนุพันธ์อันดับสูง จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 24-26 เรื่อง อนุพันธ์อันดับสูง มีจุดมุ่งหมายเพื่อให้นักเรียนสามารถหาอนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ เมื่อ $n \in \mathbb{I}$ และ $n > 1$ อีกทั้งยังเป็นแนวทางในการปฏิรูปกระบวนการจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ส่งเสริมผู้เรียนได้ฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์ และแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง อันจะทำให้ผู้เรียนเกิดความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหามากยิ่งขึ้น เกิดความคงทนในการเรียนรู้และสามารถนำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ การค้นคว้าหาความรู้ของนักเรียนและเป็นประโยชน์ต่อผู้สนใจ เพื่อนครูและวงการศึกษต่อไป

พนารัตน์ รอดภัย

 สารบัญ

	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	ข
คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับครูผู้สอน	ค
คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน	ง
ผลการเรียนรู้	จ
จุดประสงค์การเรียนรู้	จ
สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	จ
ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน	ฉ
สาระสำคัญ	ช
แบบทดสอบก่อนเรียน	1
กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน	3
ยังจำได้ไหม	4
ใบความรู้ 9.1 อนุพันธ์อันดับสูง	5
แบบฝึกทักษะ 9.1	8
ใบความรู้ 9.2 อนุพันธ์อันดับสูง (ต่อ)	18
แบบฝึกทักษะ 9.2	20
แบบทดสอบหลังเรียน	22
กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน	24
แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน	25
แบบบันทึกความก้าวหน้าของแบบฝึกทักษะ	26
บรรณานุกรม	27
ภาคผนวก	29
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	30
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	31
เฉลยแบบฝึกทักษะ 9.1	32
เฉลยแบบฝึกทักษะ 9.2	36

คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับครูผู้สอน

1. ศึกษาแผนการจัดการเรียนรู้และการใช้แบบฝึกทักษะ
2. ศึกษาและทำความเข้าใจเนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้และการดำเนินการสอน เพื่อให้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็นไปตามลำดับขั้นตอน
3. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน
4. ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้
5. ให้คำแนะนำและความช่วยเหลือแก่นักเรียนเมื่อมีปัญหา ตามความเหมาะสมกับความสามารถและศักยภาพของนักเรียนที่ต่างกัน
6. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน
7. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ใช้เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน 3 ชั่วโมง



คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับผู้เรียน

1. ศึกษาการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
2. ศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้ เพื่อให้ทราบว่านักเรียนต้องรู้และปฏิบัติสิ่งใดบ้างหลังจากจบบทเรียนแล้ว
3. ทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อตรวจสอบความรู้เดิมในเรื่องที่เรียน จากนั้นตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน
4. ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้เข้าใจ แล้วทำแบบฝึกทักษะตามลำดับขั้นตอน
5. หากไม่เข้าใจหรือมีปัญหา นักเรียนสามารถปรึกษาและแลกเปลี่ยนองค์ความรู้
6. ทำแบบทดสอบหลังเรียนแล้วตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน แล้วเปรียบเทียบกับคะแนนทดสอบก่อนเรียน
7. หากยังมีข้อสงสัยและไม่เข้าใจให้กลับไปทบทวนบทเรียนจากแบบฝึกทักษะอีกครั้ง
8. นักเรียนควรซื่อสัตย์ต่อตนเอง โดยไม่เปิดดูเฉลยระหว่างศึกษาแบบฝึกทักษะ เพื่อนักเรียนจะได้พัฒนาการเรียนรู้ของตนเองอย่างเต็มความสามารถ



ผลการเรียนรู้

หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

หาอนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ เมื่อ $n \in \mathbb{I}$ และ $n > 1$ ได้

ด้านทักษะกระบวนการ

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความซื่อสัตย์ สุจริต
2. มีวินัย
3. ใฝ่เรียนรู้
4. มุ่งมั่นในการทำงาน

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

1. ความสามารถในการสื่อสาร
2. ความสามารถในการคิด
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา



ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน



สาระสำคัญ

อนุพันธ์อันดับที่ n ของ $f(x)$ เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ $n - 1$ เช่น
อนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ $f(x)$ เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 3

อัตราการเปลี่ยนแปลงของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x เทียบกับ x ใด ๆ ก็คือ การหา
อนุพันธ์อันดับสอง ซึ่งสามารถนำมาใช้ในเรื่องการเคลื่อนที่และในการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ
ความชันของเส้นสัมผัส ขณะที่ x มีค่าใด ๆ ได้

แบบทดสอบก่อนเรียน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เล่ม 9 อนุพันธ์อันดับสูง

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกที่สุด

1. กำหนดให้ $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 5$ แล้ว $f''(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $9x^2 + 4x - 1$

ข. $16x^2 - 9x - 1$

ค. $48x^2 - 9x + 4$

ง. $48x^2 - 18x + 4$

2. กำหนดให้ $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 10$ แล้ว $f^{(4)}(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $120x + 12$

ข. $120x - 72$

ค. $120x - 36$

ง. $120x - 8$

3. ถ้า $y = (1 - 2x)^4$ แล้ว $\frac{d^2y}{dx^2}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $4x^2 + 4x + 1$

ข. $4x^2 - 4x + 1$

ค. $192x^2 - 192x + 48$

ง. $192x^2 - 192x - 48$

4. ถ้า $y = \frac{2x+1}{x-2}$ แล้ว $\frac{d^2y}{dx^2}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{-10}{\sqrt{x-2}}$

ข. $\frac{10}{\sqrt{x-2}}$

ค. $\frac{-10}{(x-2)^3}$

ง. $\frac{-10}{(x-2)^3}$

5. ให้ $f(x) = 1 - 2x - 3x^2$ แล้ว $f''(-1)$ มีค่าเท่าใด

ก. 0

ข. -8

ค. -6

ง. 6



-
- A cartoon illustration of a female teacher with curly hair, wearing a dress with a buttoned front. She is smiling and pointing at a chalkboard with her right hand. In her left hand, she holds a stack of papers. To her right, a large rectangular board displays the simple addition problem
- $2 + 4 = 6$
- . A large, blank sheet of paper is floating or being held up behind her on the left side of the frame.

กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

ยังจำได้ไหม



เรามาเปลี่ยนกันตั้งคำถามหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันกันดีมีัย

ได้เลย นายตั้งคำถามมาก่อนก็แล้วกัน



ได้เลย ถ้า $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 2x + 3$

แล้วอนุพันธ์ของ $f(x)$ มีคำตอบว่าอะไร

อ้อ ง่าย ๆ อนุพันธ์ของ $f(x)$ คือ

ถามต่อเนะ อนุพันธ์ของ $f(x)$ เมื่อ $f(x) = 5x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 2$

มีคำตอบว่าอะไร



ง่ายมาก ก็คือ.....ไฉละ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เล่ม 9 อนุพันธ์อันดับสูง

$$20x^3 + 24x^2 + 18x$$

$$5x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 2$$

ใบความรู้ 9.1 อนุพันธ์อันดับสูง

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ และ $f'(x)$ เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้ จะเรียกอนุพันธ์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x หรืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ว่าอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f ที่ x และเขียนแทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ด้วย $f''(x)$

นอกจากนี้ยังมีสัญลักษณ์อื่นที่ใช้แทนอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f ที่ x อีก เช่น $\frac{d^2y}{dx^2}$,

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) \text{ และ } y'' \text{ เป็นต้น}$$

จากบทนิยามหมายความว่า เมื่อเราหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ใด ๆ ได้เป็น $f'(x)$ ซึ่ง f' เป็นฟังก์ชันอีกฟังก์ชันหนึ่ง เราอาจหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ได้อีก

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ จงหา

1. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f
2. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f'

วิธีทำ 1. จาก $f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 - x^2 + x - 6) \\ &= 3x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\text{หรือ } f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ใด ๆ คือ $3x^2 - 2x + 1$

2. จาก $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \frac{d}{dx}f'(x) &= \frac{d}{dx}(3x^2 - 2x + 1) \\ &= 6x - 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ใด ๆ คือ $6x - 2$

จากตัวอย่างจะเห็นว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ยังสามารถนำไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 และอันดับต่อไปได้อีก ดังนั้นข้างต้น

$f'(x)$ แทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x และอนุพันธ์อันดับต่อ ๆ ไปเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ดังนี้

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$f''(x) \quad \text{หรือ} \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{แทนอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ } f \text{ ที่ } x$$

$$f'''(x) \quad \text{หรือ} \quad \frac{d^3y}{dx^3} \quad \text{แทนอนุพันธ์อันดับที่ 3 ของ } f \text{ ที่ } x$$

$$f^{(4)}(x) \quad \text{หรือ} \quad \frac{d^4y}{dx^4} \quad \text{แทนอนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ } f \text{ ที่ } x$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) \quad \text{หรือ} \quad \frac{d^ny}{dx^n} \quad \text{แทนอนุพันธ์อันดับที่ } n \text{ ของ } f \text{ ที่ } x$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $y = -2x^3 - 4x^{-3}$ จงหา $\frac{d^3y}{dx^3}$

วิธีทำ จาก $y = -2x^3 - 4x^{-3}$

$$\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} = -6x^2 + 12x^{-4}$$

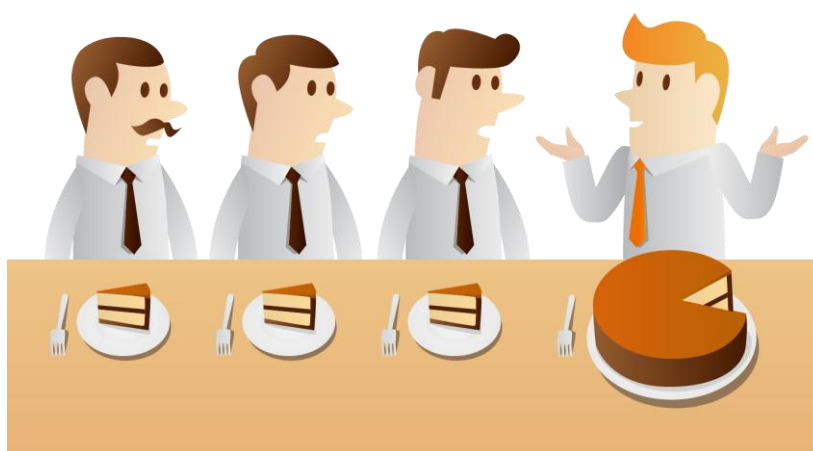
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -12x - 48x^{-5}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -12 + 240x^{-6}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{d^3y}{dx^3} = -12 + 240x^{-6} = -12 + \frac{240}{x^6}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $f(x) = 5x^4$ จงหา $f''(2)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 5x^4$
 จะได้ $f'(x) = 20x^3$
 และ $f''(x) = 60x^2$
 ดังนั้น $f''(2) = 240$



แบบฝึกทักษะ 9.1

คำชี้แจง จงหาอนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ (ข้อละ 1 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

1. จงหา $f''(x)$ เมื่อ $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$

วิธีทำ

[illegible]

2. จงหา $f''(x)$ เมื่อ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงหา $f'''(x)$ เมื่อ $f(x) = x^7 + 3x^5 - 4x^3 + 5x - 6$

วิธีทำ

4. จงหา $f'''(x)$ เมื่อ $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

วิธีทำ

5. จงหา $f'''(x)$ เมื่อ $f(x) = ax^3 - bx + c$

วิธีทำ

6. กำหนดให้ $y = (1 - 2x)^4$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$ ที่ $x = 1$

วิธีทำ

7. กำหนดให้ $f(x) = 3x^4 - 2x + \sqrt{x} - 5$ จงหา $f''(4)$

[illegible]

8. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^6}{30} - \frac{x^4}{12}$ จงหา $f'''(3)$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. กำหนดให้ $f(x) = (x^2 - 4)^3$ จงหา $f'''(2) - f''(0)$

[illegible]

10. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{3x+1}$ จงหา $f^{(4)}(-1) - f'''(1)$

[illegible]

ใบความรู้ 9.2 อนุพันธ์อันดับสูง (ต่อ)

การนำความรู้เรื่องอนุพันธ์อันดับที่ 2 ไปใช้ในทางกายภาพ ได้แก่ ความเร่ง

เนื่องจากความเร่ง (a) ของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว (v) เทียบกับเวลา t ใด ๆ ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ตามสมการการเคลื่อนที่ $s = f(t)$ เมื่อ s คือ ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในเวลา t

$$\text{จะได้ } a = \frac{dv}{dt} \quad \text{และ} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

$$\text{ดังนั้น } a = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

นั่นคือ ความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ ก็คืออนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ $s = f(t)$

ตัวอย่างที่ 4 วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นตรง โดยที่สมการของการเคลื่อนที่คือ

$$s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4 \quad \text{เมื่อ } s \text{ มีหน่วยเป็นเมตร และ } t \text{ มีหน่วยเป็นวินาที}$$

- จงหา
1. ความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ
 2. ความเร่งของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ
 3. ความเร็วของวัตถุขณะเวลา t = 1 วินาที

วิธีทำ 1. จาก $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$

$$\text{จะได้ } v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

ดังนั้น ความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ เท่ากับ $3t^2 - 12t + 9$ เมตร/วินาที

2. จาก $v = 3t^2 - 12t + 9$

$$\text{จะได้ } a = \frac{dv}{dt} = 6t - 12 \text{ เมตร/วินาที}^2$$

3. จาก 1 จะได้ความเร็วขณะเวลา t = 1 วินาที เท่ากับ

$$3(1)^2 - 12(1) + 9 = 0 \text{ เมตร/วินาที}$$

แสดงว่า ขณะเวลา t = 1 วินาที ในขณะนั้นวัตถุหยุดนิ่ง

ตัวอย่างที่ 5 ถ้าโยนลูกบอลลูกหนึ่งขึ้นไปตามแนวดิ่ง สมการการเคลื่อนที่เป็นดังนี้

$$s = f(t) = -16t^2 + 96t$$

เมื่อ s เป็นระยะทาง (ฟุต) ที่ลูกบอลอยู่สูงจากจุดโยนในขณะเวลา t วินาที

จงหา 1. ความเร็วของลูกบอลในขณะ $t = 2$ วินาที

2. ลูกบอลขึ้นไปได้สูงสุดเท่าใด

วิธีทำ 1. จาก $s = -16t^2 + 96t$

$$\text{จะได้ } v = \frac{ds}{dt} = -32t + 96 \text{ เมตร/วินาที}^2$$

2. ลูกบอลขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อ $v = 0$

$$\text{ดังนั้น } -32t + 96 = 0$$

$$t = 3$$

แสดงว่า s มีค่ามากที่สุดเมื่อ $t = 3$

$$\text{ดังนั้น ลูกบอลขึ้นไปได้สูงสุด} = f(3) = -16(3)^2 + 96(3) = 144 \text{ ฟุต}$$



แบบฝึกทักษะ 9.2

คำชี้แจง จงแสดงวิธีทำ (ข้อละ 1 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

1. ปล่อยวัตถุลงสู่พื้นดิน วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $s = 16t^2$ เมตร ในเวลา t วินาที จงหา
- 1) ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้หลังจากปล่อยวัตถุไป 3 วินาที
 - 2) ความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ
 - 3) ความเร็วขณะเวลา $t = 2$ วินาที
 - 4) ความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ
 - 5) ความเร่งขณะเวลา $t = 5$ วินาที

[illegible]

2. โยนก้อนหินขึ้นไปในอากาศ ก้อนหินเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $128t - 16t^2$ เมตร ในเวลา t วินาที จงหา

- 1) ระยะทางที่ก้อนหินเคลื่อนที่ได้หลังจากโยนไปแล้ว 5 วินาที
- 2) ความเร็วในการเคลื่อนที่ของก้อนหินขณะเวลา t ใดๆ
- 3) ความเร็วในการเคลื่อนที่ของก้อนหินขณะวินาทีที่ 4
- 4) ความเร่งของก้อนหินขณะเวลา t ใดๆ
- 5) ความเร่งของก้อนหินขณะเวลาผ่านไป 2 วินาที

[illegible]

 แบบทดสอบหลังเรียน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เล่ม 9 อนุพันธ์อันดับสูง

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกต้องที่สุด

1. ถ้า $y = \frac{2x+1}{x-2}$ แล้ว $\frac{d^2y}{dx^2}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{-10}{\sqrt{x-2}}$

ข. $\frac{10}{\sqrt{x-2}}$

ค. $\frac{-10}{(x-2)^3}$

ง. $\frac{-10}{(x-2)^3}$

2. กำหนดให้ $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 5$ แล้ว $f''(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $9x^2 + 4x - 1$

ข. $16x^2 - 9x - 1$

ค. $48x^2 - 9x + 4$

ง. $48x^2 - 18x + 4$

3. ให้ $f(x) = 1 - 2x - 3x^2$ แล้ว $f''(-1)$ มีค่าเท่าใด

ก. 0

ข. -8

ค. -6

ง. 6

4. กำหนดให้ $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 10$ แล้ว $f^{(4)}(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $120x + 12$

ข. $120x - 72$

ค. $120x - 36$

ง. $120x - 8$

5. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ แล้ว $f^{(3)}(0) + f''(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 56

ข. 40

ค. -40

ง. -56

6. กำหนดให้ $f(x) = 3x^5 + 7x^4 - 2x^3 - 2x + 1$ แล้ว $f^{(5)}(-3)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 360

ข. 328

ค. 168

ง. 144

-
- A colorful illustration of four children playing in a snowy landscape. On the left, a snowman is built from three large snowballs, wearing a blue hat and scarf, with a stick for an arm. To its right, a boy in a purple shirt and blue pants is rolling a large snowball. Next to him, a boy in a yellow shirt and green pants is holding a snowball. Then, a girl in a blue dress and purple headband is rolling a snowball. On the far right, a girl in an orange dress and green hat is holding a snowball. In the background, there are stylized blue and white snow-covered trees and a pile of small snowballs on the left. The ground is brown, suggesting a path or clearing.

กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
เล่ม 9 อนุพันธ์อันดับสูง

ชื่อ.....ชั้น..... เลขที่.....
โรงเรียนบ้านไร่วิทยา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	ความก้าวหน้า	คิดเป็นร้อยละ
การทดสอบก่อนเรียน	10			
การทดสอบหลังเรียน	10			



แบบบันทึกความก้าวหน้าของแบบฝึกทักษะ
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
เล่ม 9 อนุพันธ์อันดับสูง

ชื่อ.....ชั้น..... เลขที่.....
โรงเรียนบ้านไรวีทยา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

แบบฝึกทักษะที่	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	คิดเป็นร้อยละ	ผ่านเกณฑ์*	ไม่ผ่านเกณฑ์**
9.1	10				
9.2	10				
รวมทั้งหมด	20				
เฉลี่ย					
คิดเป็นร้อยละ					

* ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
 ** ไม่ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนน้อยกว่าร้อยละ 80 ของคะแนนเต็ม





- กนกวลี อุษณกรกุล และรณชัย มาเจริญทรัพย์. (2548). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด. (2554). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- กมลเอก ไทยเจริญ. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.
- กานดา ลือสุทธิวิบูลย์ และยุพิน จิรสุขานนท์. (2548). **สรุปคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ม. 4 – 5 – 6 รายวิชาพื้นฐานและรายวิชาเพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์ Pure Pure ม.6 (2 ภาคเรียน) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ Entrance คณิตศาสตร์ 15 พ.ศ.** กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด.
- เชษฐ์ ชื่นสกุลดี. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ PAT 1 ความถนัดทางคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: ห้างหุ้นส่วนจำกัดรุ่งเรืองสาส์นการพิมพ์.
- ณรงค์ ปิ่นนัม และคณะ. (2537). **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์รวม ม.4-5-6**. กรุงเทพฯ: ภูมิบัณฑิตการพิมพ์ จำกัด.
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2**. กรุงเทพฯ: แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด.
- ประชา ศิวเวทกุล. (2555). **กฎแฉคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 รายวิชาเพิ่มเติม เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- เลิศ สิทธิโกศล. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์แผนใหม่ แคลคูลัส ม.ปลาย 4-5-6**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ แมสพับลิชชิง.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว. (2554). **คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สมัย เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.4-5-6 สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด. (ม.ป.ป.). **Mathematics Problems โจทย์คณิตศาสตร์ ม. 4-5-6**. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.
- สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพรรณ เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน + เพิ่มเติม เล่มที่ 6 ช่วงชั้นที่ 4 (มัธยมศึกษาปีที่ 4-6)**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาติบุตร. (2556). แคลคูลัส Calculus 1

ฉบับเสริมประสบการณ์. กรุงเทพฯ: บริษัทพิมพ์ดีการพิมพ์ จำกัด.

สุเทพ จันทรสมศักดิ์. (ม.ป.ป.). คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015.

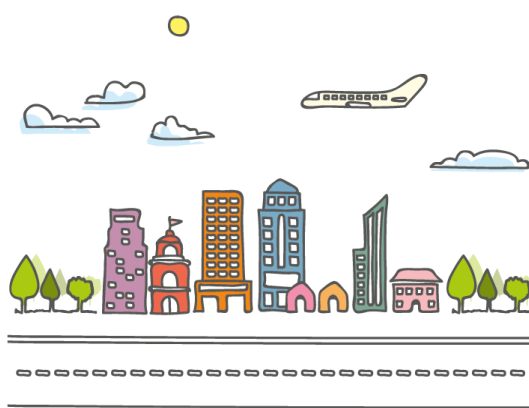
กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ภูมิบัณฑิต.

อเนก หิรัญ. (2544). คณิตศาสตร์ ม.6 ค 015. กรุงเทพฯ: หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์ เซ็นเตอร์.

_____. (ม.ป.ป.). แบบฝึกหัดพื้นฐาน วิชาคณิตศาสตร์ ม.6 ค 015. กรุงเทพฯ:

หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

Finney ,Ross L. and other. (2007). Calculus Graphical, Numerical, Algebraic
Third Edition. Upper Saddle River. New Jersey: Prentice Hall.





เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อ	คำตอบ
1	ง
2	ข
3	ค
4	ง
5	ค
6	ก
7	ค
8	ง
9	ก
10	ค

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ	คำตอบ
1	ง
2	ง
3	ค
4	ข
5	ค
6	ก
7	ค
8	ค
9	ง
10	ก

เฉลยแบบฝึกทักษะ 9.1

1. จงหา $f''(x)$ เมื่อ $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$
 จะได้ $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$
 และ $f''(x) = 6x - 4$

2. จงหา $f''(x)$ เมื่อ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
 $= x^{-\frac{1}{2}}$
 จะได้ $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$
 และ $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$

3. จงหา $f'''(x)$ เมื่อ $f(x) = x^7 + 3x^5 - 4x^3 + 5x - 6$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^7 + 3x^5 - 4x^3 + 5x - 6$
 จะได้ $f'(x) = 7x^6 + 15x^4 - 12x^2 + 5$
 และ $f''(x) = 42x^5 + 60x^3 - 24x$
 ดังนั้น $f'''(x) = 210x^4 + 180x^2 - 24$

4. จงหา $f'''(x)$ เมื่อ $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 + x^{-1}$
 จะได้ $f'(x) = 2x - x^{-2}$
 และ $f''(x) = 2 + 2x^{-3}$
 ดังนั้น $f'''(x) = -6x^{-4}$
 $= -\frac{6}{x^4}$

5. จงหา $f'''(x)$ เมื่อ $f(x) = ax^3 - bx + c$

วิธีทำ จาก $f(x) = ax^3 - bx + c$

จะได้ $f'(x) = 3ax^2 - b$

และ $f''(x) = 6ax$

ดังนั้น $f'''(x) = 6a$

6. กำหนดให้ $y = (1 - 2x)^4$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$ ที่ $x = 1$

วิธีทำ จาก $y = (1 - 2x)^4$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = 4(1 - 2x)^3(-2x)$

$= -8x(1 - 2x)^3$

และ $\frac{d^2y}{dx^2} = -8x \frac{d}{dx}(1 - 2x)^3 + (1 - 2x)^3 \frac{d}{dx}(-8x)$

$= (1 - 2x)^2(64x - 8)$

ดังนั้น $\frac{d^2y}{dx^2}$ ที่ $x = 1$ เท่ากับ $(1 - 2)^2(64 - 8) = 56$

7. กำหนดให้ $f(x) = 3x^4 - 2x + \sqrt{x} - 5$ จงหา $f''(4)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 3x^4 - 2x + \sqrt{x} - 5$

$= 3x^4 - 2x + x^{\frac{1}{2}} - 5$

จะได้ $f'(x) = 12x^3 - x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

และ $f''(x) = 36x^2 - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$= 36x^2 - \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$

ดังนั้น $f''(4) = 36(4)^2 - \frac{1}{4\sqrt{4^3}} = 576 - \frac{1}{32}$

$= 575\frac{31}{32}$

8. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^6}{30} - \frac{x^4}{12}$ จงหา $f'''(3)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{x^6}{30} - \frac{x^4}{12}$

จะได้ $f'(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$

และ $f''(x) = x^4 - x^2$

ดังนั้น $f'''(x) = 4x^3 - 2x$

นั่นคือ $f'''(3) = 4(3)^3 - 2(3) = 102$

9. กำหนดให้ $f(x) = (x^2 - 4)^3$ จงหา $f'''(2) - f''(0)$

วิธีทำ จาก $f(x) = (x^2 - 4)^3$

จะได้ $f'(x) = 3(x^2 - 4)^2(2x)$

$= 6x(x^2 - 4)^2$

และ $f''(x) = 6x \frac{d}{dx}(x^2 - 4)^2 + (x^2 - 4)^2 \frac{d}{dx}(6x)$

$= 12x(x^2 - 4)(2x) + (x^2 - 4)^2(6)$

$= 24x^2(x^2 - 4) + 6(x^2 - 4)^2$

$= (x^2 - 4)(24x^2 + 6x^2 - 24)$

$= (x^2 - 4)(30x^2 - 24)$

$f'''(x) = (x^2 - 4) \frac{d}{dx}(30x^2 - 24) + (30x^2 - 24) \frac{d}{dx}(x^2 - 4)$

$= (x^2 - 4)(60x) + (30x^2 - 24)(2x)$

$= (60x^3 - 240x) + (60x^3 - 48x)$

$= 120x^3 - 288x$

ดังนั้น $f'''(2) - f''(0) = 120(2)^3 - 288(2) - (0^2 - 4)(-24)$

$= 288$

10. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{3x+1}$ จงหา $f^{(4)}(-1) - f'''(1)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{1}{3x+1}$

$$\text{จะได้ } f'(x) = \frac{(3x+1) \frac{d}{dx}(1) - 1 \frac{d}{dx}(3x+1)}{(3x+1)^2}$$

$$= \frac{-3}{(3x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(3x+1)^2 \frac{d}{dx}(-3) - (-3) \frac{d}{dx}(3x+1)^2}{(3x+1)^4}$$

$$= \frac{6(3x+1)(3)}{(3x+1)^4}$$

$$= \frac{18}{(3x+1)^3}$$

$$\text{และ } f'''(x) = \frac{(3x+1)^3 \frac{d}{dx}(18) - 18 \frac{d}{dx}(3x+1)^3}{(3x+1)^6}$$

$$= \frac{-54(3x+1)^2(3)}{(3x+1)^6}$$

$$= \frac{-162}{(3x+1)^4}$$

$$\text{และ } f^{(4)}(x) = \frac{(3x+1)^4 \frac{d}{dx}(-162) - (-162) \frac{d}{dx}(3x+1)^4}{(3x+1)^8}$$

$$= \frac{1944}{(3x+1)^5}$$

$$\text{ดังนั้น } f^{(4)}(-1) - f'''(1) = -\frac{1944}{32} + \frac{162}{256} = -\frac{15390}{256}$$

$$= -60 \frac{30}{256}$$

เฉลยแบบฝึกทักษะ 9.2

ปล่อยวัตถุลงสู่พื้นดิน วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $s = 16t^2$ เมตร ในเวลา t วินาที จงหา

1. ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้หลังจากปล่อยวัตถุไป 3 วินาที
2. ความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ
3. ความเร็วขณะเวลา $t = 2$ วินาที
4. ความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ
5. ความเร่งขณะเวลา $t = 5$ วินาที

วิธีทำ

1. จาก $s = 16t^2$

จะได้ $s = 16(3)^2 = 144$

ดังนั้น ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้หลังจากปล่อยวัตถุไป 3 วินาที เท่ากับ 144 เมตร

2. จาก $s = 16t^2$

จะได้ $v = \frac{ds}{dt} = 32t$

ดังนั้น ความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ เท่ากับ $32t$ เมตร/วินาที

3. จาก $v = 32t$

ดังนั้น ความเร็วขณะเวลา $t = 2$ วินาที เท่ากับ $32(2) = 64$ เมตร/วินาที

4. ความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ

จาก $v = 32t$

จะได้ $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(32t)}{dt} = 32$

ดังนั้น ความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ เท่ากับ 32 เมตร/วินาที²

5. ความเร่งขณะเวลา $t = 5$ วินาที เท่ากับ 32 เมตร/วินาที²

2. โยนก้อนหินขึ้นไปในอากาศ ก้อนหินเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $128t - 16t^2$ เมตร ในเวลา t วินาที จงหา

- 1) ระยะทางที่ก้อนหินเคลื่อนที่ได้หลังจากโยนไปแล้ว 5 วินาที
- 2) ความเร็วในการเคลื่อนที่ของก้อนหินขณะเวลา t ใดๆ
- 3) ความเร็วในการเคลื่อนที่ของก้อนหินขณะวินาทีที่ 4
- 4) ความเร่งของก้อนหินขณะเวลา t ใดๆ
- 5) ความเร่งของก้อนหินขณะเวลาผ่านไป 2 วินาที

วิธีทำ

1. จาก $s = 128t - 16t^2$

จะได้ $s = 128(5) - 16(5)^2 = 640 - 400 = 240$

ดังนั้น ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้หลังจากโยนไปแล้ว 5 วินาที เท่ากับ 240 เมตร

2. จาก $s = 128t - 16t^2$

จะได้ $v = \frac{ds}{dt} = 128 - 32t$

ดังนั้น ความเร็วในการเคลื่อนที่ของก้อนหินขณะเวลา t ใดๆ เท่ากับ $128 - 32t$ เมตร/วินาที

3. จาก $v = 128 - 32t$

ดังนั้น ความเร็วขณะวินาทีที่ 4 เท่ากับ $= 128 - 32(4) = 0$ เมตร/วินาที

ความเร็วเป็น 0 แสดงว่าก้อนหินขึ้นถึงจุดสูงสุดที่สามารถไปถึงได้ และกำลังจะเคลื่อนที่หล่นลงมา

4. ความเร่งของก้อนหินขณะเวลา t ใดๆ

จาก $v = 128 - 32t$

จะได้ $a = \frac{dv}{dt} = -32$ เมตร/วินาที²

ความเร่งมีค่าติดลบ แสดงว่าก้อนหินมีความเร็วลดลงเรื่อยๆ

5. ดังนั้น ความเร่งของก้อนหินขณะเวลาผ่านไป 2 วินาที เท่ากับ -32 เมตร/วินาที²