

คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของหน่วยการเรียนรู้เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ประกอบด้วยแบบฝึกทักษะทั้งหมด 10 เล่ม ดังนี้

- เล่ม 1 ลิมิตของฟังก์ชัน
- เล่ม 2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน
- เล่ม 3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
- เล่ม 4 อัตราการเปลี่ยนแปลง
- เล่ม 5 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
- เล่ม 6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร
- เล่ม 7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ
- เล่ม 8 ความชันของเส้นโค้ง
- เล่ม 9 อนุพันธ์อันดับสูง
- เล่ม 10 การประยุกต์ของอนุพันธ์

โดยในแบบฝึกทักษะแต่ละเล่ม ประกอบด้วยผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ครอบคลุมทั้งด้านความรู้ ด้านทักษะกระบวนการและด้านคุณลักษณะ ซึ่งกิจกรรมของแบบฝึกทักษะแต่ละเล่มเสร็จสมบูรณ์ในตัวเอง ผู้เรียนสามารถใช้ได้ด้วยตนเอง

สำหรับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่ม 8 ความชันของเส้นโค้ง จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 21-23 เรื่อง ความชันของเส้นโค้ง มีจุดมุ่งหมายเพื่อให้นักเรียนสามารถหาความชันของเส้นโค้งและสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้ อีกทั้งยังเป็นแนวทางในการปฏิรูปกระบวนการจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ส่งเสริมผู้เรียนได้ฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์และแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง อันจะทำให้ผู้เรียนเกิดความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหามากยิ่งขึ้น เกิดความคงทนในการเรียนรู้และสามารถนำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ การค้นคว้าหาความรู้ของนักเรียนและเป็นประโยชน์ต่อผู้สนใจ เพื่อนครูและวงการศึกษต่อไป

พนารัตน์ รอดภัย

 สารบัญ

	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	ข
คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับครูผู้สอน	ค
คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน	ง
ผลการเรียนรู้	จ
จุดประสงค์การเรียนรู้	จ
สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	จ
ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน	ฉ
สาระสำคัญ	ช
แบบทดสอบก่อนเรียน	1
กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน	3
ยังจำได้ไหม	4
ใบความรู้ 8.1 ความชันของเส้นโค้ง	5
แบบฝึกทักษะ 8.1	
ตอนที่ 1	9
ตอนที่ 2	19
แบบทดสอบหลังเรียน	29
กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน	31
แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน	32
แบบบันทึกความก้าวหน้าของแบบฝึกทักษะ	33
บรรณานุกรม	34
ภาคผนวก	36
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	37
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	38
เฉลยแบบฝึกทักษะ 8.1	39

คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับครูผู้สอน

1. ศึกษาแผนการจัดการเรียนรู้และการใช้แบบฝึกทักษะ
2. ศึกษาและทำความเข้าใจเนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้และการดำเนินการสอน เพื่อให้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็นไปตามลำดับขั้นตอน
3. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน
4. ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้
5. ให้คำแนะนำและความช่วยเหลือแก่นักเรียนเมื่อมีปัญหา ตามความเหมาะสมกับความสามารถและศักยภาพของนักเรียนที่แตกต่างกัน
6. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน
7. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ใช้เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน 3 ชั่วโมง



คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับผู้เรียน

1. ศึกษาการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
2. ศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้ เพื่อให้ทราบว่านักเรียนต้องรู้และปฏิบัติสิ่งใดบ้างหลังจากจบบทเรียนแล้ว
3. ทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อตรวจสอบความรู้เดิมในเรื่องที่เรียน จากนั้นตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน
4. ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้เข้าใจ แล้วทำแบบฝึกทักษะตามลำดับขั้นตอน
5. หากไม่เข้าใจหรือมีปัญหา นักเรียนสามารถปรึกษาและแลกเปลี่ยนองค์ความรู้
6. ทำแบบทดสอบหลังเรียนแล้วตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน แล้วเปรียบเทียบกับคะแนนทดสอบก่อนเรียน
7. หากยังมีข้อสงสัยและไม่เข้าใจให้กลับไปทบทวนบทเรียนจากแบบฝึกทักษะอีกครั้ง
8. นักเรียนควรซื่อสัตย์ต่อตนเอง โดยไม่เปิดดูเฉลยระหว่างศึกษาแบบฝึกทักษะ เพื่อนักเรียนจะได้พัฒนาการเรียนรู้ของตนเองอย่างเต็มความสามารถ



ผลการเรียนรู้

หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

หาความชันของเส้นโค้งและสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้

ด้านทักษะกระบวนการ

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความซื่อสัตย์ สุจริต
2. มีวินัย
3. ใฝ่เรียนรู้
4. มุ่งมั่นในการทำงาน

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

1. ความสามารถในการสื่อสาร
2. ความสามารถในการคิด
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา



ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน



สาระสำคัญ

ความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ เท่ากับ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้ เรียกว่าค่าของลิมิตดังกล่าวว่า “อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ”



รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เล่ม 8 ความชันของเส้นโค้ง

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกที่สุด

1. สมการของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $x^2 - y^2 = 7$ ณ จุดสัมผัส $(4, 3)$ คือข้อใด

ก. $3x + 4y + 24 = 0$	ข. $3x - 4y - 24 = 0$
ค. $3x + 4y + 7 = 0$	ง. $4x - 3y - 7 = 0$
2. ถ้าความชันของเส้นสัมผัสซึ่งสัมผัสกราฟ $y = 5x^2 + cx$; $c \in \mathbb{R}$ ที่จุด $(3, -21)$ มีค่าเท่ากับ 8 แล้ว c มีค่าเท่าใด

ก. -82	ข. -22
ค. 22	ง. 82
3. จุดบนเส้นโค้ง $y = x^2 - 3x - 4$ ที่มีความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ 1 มีค่าเท่าใด

ก. $(-2, -6)$	ข. $(-2, 6)$
ค. $(2, -6)$	ง. $(2, 6)$
4. ถ้า (a, b) เป็นจุดสัมผัสที่ทำให้เส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 2x^2 - 8x + 5$ ขนานกับแกน x แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าใด

ก. 1	ข. 2
ค. -1	ง. -3
5. กำหนดให้ $f(x) = \frac{-2x^3 + 3x^2 + 2x^{\frac{3}{2}} - 1}{x^2}$ แล้ว ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1, 2)$ มีค่าเท่าใด

ก. $\frac{1}{2}$	ข. 1
ค. $-\frac{1}{2}$	ง. -1

- 

กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

ยังจำได้ไหม

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้นิยามคืออะไร จำได้หรือเปล่า



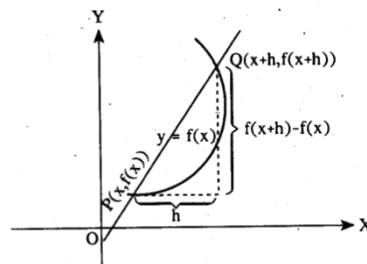
จำได้สิ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้นิยาม หาได้จาก
สูตร.....



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ใบความรู้ 8.1 ความชันของเส้นโค้ง

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นสมการเส้นโค้งมีกราฟ ดังภาพที่ 8.1

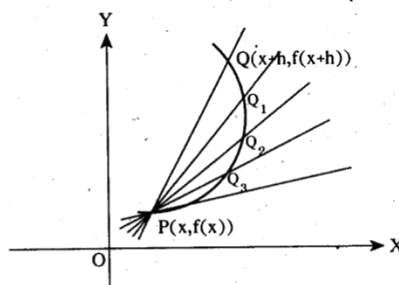


ภาพที่ 8.1 แสดงกราฟของเส้นโค้ง $y = f(x)$

ที่มา: อเนก หิรัญ (2539: 154)

จากภาพที่ 8.1 เป็นกราฟของเส้นโค้ง $y = f(x)$ จะเห็นว่าความชันของเส้นตรงที่ลากผ่านจุด

$P(x, f(x))$ และ $Q(x+h, f(x+h))$ เท่ากับ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$



ภาพที่ 8.2 กราฟแสดงการเคลื่อนที่ของจุด Q เข้าหาจุด P ตามแนวเส้นโค้ง $y = f(x)$

ที่มา: อเนก หิรัญ (2539: 154)

จากภาพที่ 8.2 ถ้าจุด Q เคลื่อนเข้าหาจุด P ตามแนวเส้นโค้ง $y = f(x)$ (เมื่อกำหนดให้จุด P คงที่) จะเห็นว่า $h \rightarrow 0$ และเส้นตรงที่ลากผ่านจุด P และ จุด Q จะเป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด $P(x, y)$ ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด $P(x, y)$ ใด ๆ คือ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{dy}{dx}$$

บทนิยาม ถ้า $y = f(x)$ เป็นสมการของเส้นโค้ง เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ

จะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชัน เท่ากับ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด $P(x, y)$ หมายถึง ความชันของเส้นสัมผัสโค้ง ณ จุด P

จะสังเกตว่า $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เราเรียกค่าของลิมิตที่ได้ว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x

ดังนั้น การหาความชันของเส้นโค้งก็คือการอนุพันธ์ของสมการเส้นโค้งนั่นเอง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาความชันของเส้นโค้ง $y = x^3$ ณ จุด $(2, 8)$

วิธีทำ

ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด $P(x, y)$ ใด ๆ เท่ากับ

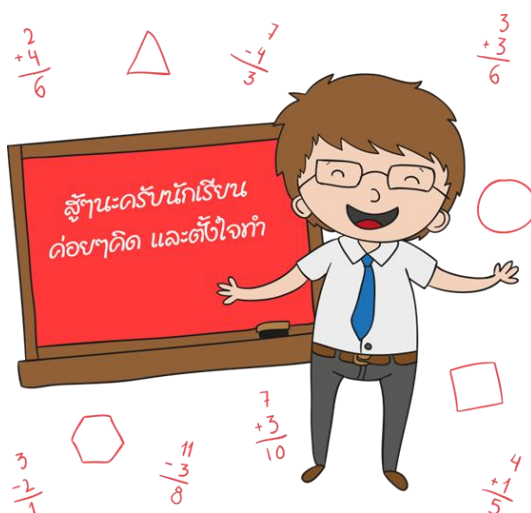
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)(x+h)(x+h) - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด $(2, 8)$ เท่ากับ $3(2)^2 = 12$

เรามาศึกษาการหาความชันของเส้นโค้ง
และความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดใด ๆ
โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรนะครับ



ถ้าเพื่อน ๆ จำสูตรการหาอนุพันธ์ไม่ได้
ให้กลับไปทบทวนสูตรในเล่ม 6 นะคะ



ตัวอย่างที่ 2 จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 + 4x^2 + 2x$ ที่จุด $(2, 20)$

วิธีทำ จาก $y = x^3 + 4x^2 + 2x$

$$\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 8x + 2$$

นั่นคือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ เท่ากับ $3x^2 + 8x + 2$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(2, 20)$ เท่ากับ $3(2)^2 + 8(2) + 2 = 30$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการเส้นตรงที่ลากมาตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 + 2x + 5$ ณ จุด $(1, 8)$

วิธีทำ จาก $y = x^2 + 2x + 5$

$$\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} = 2x + 2$$

นั่นคือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ เท่ากับ $2x + 2$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1, 8)$ เท่ากับ $2(1) + 2 = 4$

และเส้นตรงที่ลากมาตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1, 8)$ มีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{4}$

เส้นตรง 2 เส้นตั้งฉากกัน ผลคูณของความชันเท่ากับ -1 และเส้นสัมผัสโค้งมีความชัน

เท่ากับ 4 นั่นคือ เส้นตั้งฉากกับเส้นสัมผัสโค้งจะมีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{4}$

$$\text{เนื่องจาก } -\frac{1}{4} \times 4 = -1$$

จากสมการเส้นตรง $y - y_1 = m(x - x_1)$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ลากมาตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1, 8)$ และมีความชันเท่ากับ

$-\frac{1}{4}$ มีสมการเป็น

$$y - 8 = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

$$4y - 32 = -x + 1 \quad (\text{นำ 4 คูณทั้งสองข้างของสมการ})$$

$$x + 4y - 33 = 0$$

แบบฝึกทักษะ 8.1

คำชี้แจง จงแสดงวิธีทำ (ข้อละ 1 คะแนน คะแนนเต็ม 20 คะแนน)

คำชี้แจง จงแสดงวิธีทำ (ข้อละ 1 คะแนน คะแนนเต็ม 20 คะแนน)

ตอนที่ 1 จงหาความชันของเส้นโค้งและความชันของเส้นสัมผัส ณ จุดที่กำหนดให้

1. $y = x^2 - 3x$ ที่จุด $(3, 0)$

[illegible]

2. $y = 5x^2 - 6$ ที่จุด $(2, 14)$

วิธีทำ

3. $y = x - x^2$ ที่จุดซึ่ง $x = \frac{1}{2}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. $y = \frac{x^2 + 2}{x}$ ที่จุดซึ่ง $x = 1$

วิธีทำ

5. $y = 1 + 2x - 3x^2$ ที่จุด $(1, 0)$

วิธีทำ

6. $f(x) = x^2 + 2x + 5$ ณ จุด $(2, 13)$

วิธีทำ

7. $y = 2x^2 - x + 12$ ณ จุด $(1, 6)$

วิธีทำ

8. $y = (x^2 + 2)(1 - 3x)$ ณ จุด $x = -1$

วิธีทำ

9. $y = \sqrt{4 - x^2}$ ณ จุด $x = 0$

วิธีทำ

10. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ ณ จุด $x = -3$

วิธีทำ

ตอนที่ 2 จงแสดงวิธีทำ

1. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 4x^2 + 2x - 6$ ที่จุด $(6, 4)$

[illegible]

2. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 + 4$ ที่จุด $(2, 4)$

วิธีทำ

3. จงหาสมการของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 2x + 3\sqrt{x}$ ที่จุด $x = 4$

[illegible]

4. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 3)$ และขนานกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3$ ที่จุด $(1, 1)$

วิธีทำ

5. กำหนดให้เส้นโค้งมีสมการเป็น $y = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ จงหาสมการของเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้นโค้งที่จุดสัมผัส $(3, 25)$

[illegible]

6. จากข้อ 3 จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส (3 , 25)

วิธีทำ

This image shows a full page of a document template designed for handwriting practice or general note-taking. It consists of approximately 28 evenly spaced horizontal dotted lines across the entire width of the page. There are no margins, headers, footers, or other markings present.

7. ถ้าความชันของเส้นตรงซึ่งสัมผัสกราฟของ $y = 4 - x^2$ ที่จุด (a, b) มีค่าเท่ากับ -2 จงหาจุด (a, b)

วิธีทำ

8. ถ้าเส้นตรง $y = -x^2 + 4x + 1$ ขนานกับเส้นตรง $2y - 4x + 1 = 0$ จงหาจุดสัมผัส

วิธีทำ

9. จงหาจุด (a, b) บนเส้นโค้ง $y = x^3 - 15x^2 + 27x - 2$ ซึ่งสัมผัสเส้นโค้งนี้ที่จุด (a, b) และขนานกับแกน x

วิธีทำ

10. ถ้า L เป็นเส้นตรงซึ่งมีความชันเท่ากับ 2 และสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 + 2$ แล้ว จงหาสมการเส้นตรง

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เล่ม 8 ความชันของเส้นโค้ง

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกที่สุด

1. จุดบนเส้นโค้ง $y = x^2 - 3x - 4$ ที่มีความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ 1 มีค่าเท่าใดก. $(-2, -6)$ ข. $(2, -6)$ ค. $(-2, 6)$ ง. $(2, 6)$ 2. กำหนดให้ $f(x) = \frac{-2x^3 + 3x^2 + 2x^{\frac{3}{2}} - 1}{x^2}$ แล้ว ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1, 2)$

มีค่าเท่าใด

ก. -1 ข. $-\frac{1}{2}$ ค. $\frac{1}{2}$ ง. 1 3. สมการของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $x^2 - y^2 = 7$ ณ จุดสัมผัส $(4, 3)$ คือข้อใดก. $3x + 4y + 24 = 0$ ข. $4x - 3y - 7 = 0$ ค. $3x + 4y + 7 = 0$ ง. $3x - 4y - 24 = 0$ 4. ถ้าเส้นสัมผัสโค้ง $y = 2x^2 + 2x + 1$ ณ จุด $P(x, y)$ ขนานกับเส้นตรง $2x - y + 4 = 0$ แล้ว จุด $P(x, y)$ มีค่าเท่าใดก. $(1, 1)$ ข. $(0, -1)$ ค. $(0, 1)$ ง. $(1, 0)$ 5. ถ้าความชันของเส้นสัมผัสซึ่งสัมผัสกราฟ $y = 5x^2 + cx$; $c \in \mathbb{R}$ ที่จุด $(3, -21)$ มีค่าเท่ากับ 8 แล้ว c มีค่าเท่าใด

ก. 82

ข. 22

ค. -22

ง. -82

-

กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน
 แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
 เล่ม 8 ความชันของเส้นโค้ง

ชื่อ.....ชั้น..... เลขที่.....
 โรงเรียนบ้านไร่วิทยา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	ความก้าวหน้า	คิดเป็นร้อยละ
การทดสอบก่อนเรียน	10			
การทดสอบหลังเรียน	10			



แบบบันทึกความก้าวหน้าของแบบฝึกทักษะ
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
เล่ม 8 ความชันของเส้นโค้ง

ชื่อ.....ชั้น..... เลขที่.....
โรงเรียนบ้านไร่วิทยา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

แบบฝึกทักษะที่	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	คิดเป็นร้อยละ	ผ่านเกณฑ์*	ไม่ผ่านเกณฑ์**
8.1	20				
รวมทั้งหมด	20				
เฉลี่ย					
คิดเป็นร้อยละ					

* ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
 ** ไม่ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนน้อยกว่าร้อยละ 80 ของคะแนนเต็ม





- กนกวลี อุษณกรกุล และรณชัย มาเจริญทรัพย์. (2548). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด. (2554). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- กมลเอก ไทยเจริญ. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.
- กานดา ลือสุทธิวิบูลย์ และยุพิน จิรสุขานนท์. (2548). **สรุปคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ม. 4 – 5 – 6 รายวิชาพื้นฐานและรายวิชาเพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์ Pure Pure ม.6 (2 ภาคเรียน) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ Entrance คณิตศาสตร์ 15 พ.ศ.** กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด.
- เชษฐ์ ชื่นสกุลดี. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ PAT 1 ความถนัดทางคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: ห้างหุ้นส่วนจำกัดรุ่งเรืองสาส์นการพิมพ์.
- ณรงค์ ปิ่นนิม และคณะ. (2537). **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์รวม ม.4-5-6**. กรุงเทพฯ: ภูมิบัณฑิตการพิมพ์ จำกัด.
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2**. กรุงเทพฯ: แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด.
- ประชา ศิวเวทกุล. (2555). **กฎแฉคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 รายวิชาเพิ่มเติม เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- เลิศ สิทธิโกศล. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์แผนใหม่ แคลคูลัส ม.ปลาย 4-5-6**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ แมสพับลิชชิง.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว. (2554). **คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สมัย เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.4-5-6 สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด. (ม.ป.ป.). **Mathematics Problems โจทย์คณิตศาสตร์ ม. 4-5-6**. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.
- สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพรณ เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน + เพิ่มเติม เล่มที่ 6 ช่วงชั้นที่ 4 (มัธยมศึกษาปีที่ 4-6)**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาติบุตร. (2556). แคลคูลัส Calculus 1

ฉบับเสริมประสบการณ์. กรุงเทพฯ: บริษัทพิมพ์ดีการพิมพ์ จำกัด.

สุเทพ จันทรสมศักดิ์. (ม.ป.ป.). คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015.

กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ภูมิบัณฑิต.

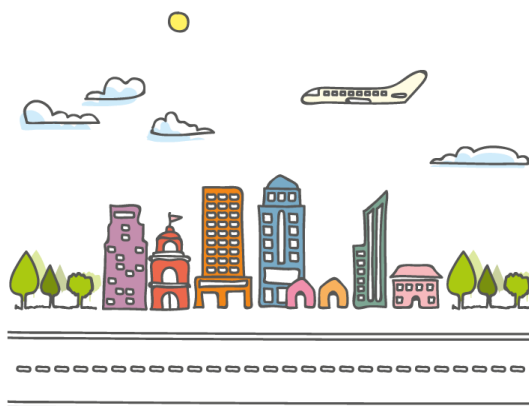
อเนก หิรัญ. (2539). คณิตศาสตร์ 015. กรุงเทพฯ: หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์ เซ็นเตอร์.

_____. (2544). คณิตศาสตร์ ม.6 ค 015. กรุงเทพฯ: หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์ เซ็นเตอร์.

_____. (ม.ป.ป.). แบบฝึกหัดพื้นฐาน วิชาคณิตศาสตร์ ม.6 ค 015. กรุงเทพฯ:

หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

Finney ,Ross L. and other. (2007). Calculus Graphical, Numerical, Algebraic
Third Edition. Upper Saddle River. New Jersey: Prentice Hall.



ภาคผนวก

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อ	คำตอบ
1	ง
2	ข
3	ค
4	ก
5	ง
6	ก
7	ข
8	ก
9	ง
10	ค

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ	คำตอบ
1	ข
2	ก
3	ข
4	ค
5	ค
6	ง
7	ค
8	ข
9	ก
10	ง

เฉลยแบบฝึกทักษะ 8.1

ตอนที่ 1 จงหาความชันของเส้นโค้งและความชันของเส้นสัมผัส ณ จุดที่กำหนดให้

1. $y = x^2 - 3x$ ที่จุด $(3, 0)$

วิธีทำ ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 - 3(x+h)] - (x^2 - 3x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h - x^2 + 3x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 3) \\ &= 2x - 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด $(3, 0)$ ใด ๆ เท่ากับ $2(3) - 3 = 3$

ความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(3, 0)$ เท่ากับ 3

2. $y = 5x^2 - 6$ ที่จุด $(2, 14)$

วิธีทำ ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[5(x+h)^2 - 6] - (5x^2 - 6)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 - 6 - 5x^2 + 6}{h} \\ &= 10x \end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด $(2, 14)$ ใด ๆ เท่ากับ $10(2) = 20$

ความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(2, 14)$ เท่ากับ 20

3. $y = x - x^2$ ที่จุดซึ่ง $x = \frac{1}{2}$

วิธีทำ ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h) - (x+h)^2] - (x - x^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h - x^2 - 2xh - h^2 - x + x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (1 - 2x - h) \\ &= 1 - 2x \end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุดซึ่ง $x = \frac{1}{2}$ เท่ากับ $1 - 2(1) = -1$

ความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดซึ่ง $x = \frac{1}{2}$ เท่ากับ 1

4. $y = \frac{x^2 + 2}{x}$ ที่จุดซึ่ง $x = 1$

วิธีทำ ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\begin{aligned} \text{จาก } y &= f(x) &= \frac{x^2 + 2}{x} \\ \text{จะได้ } f(x+h) &= \frac{(x+h)^2 + 2}{x+h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2}{x+h} \\ \text{และ } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \left(\frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2}{x+h} - \frac{x^2 + 2}{x} \right) \times \frac{1}{h} \\ &= \left[\frac{x(x^2 + 2xh + h^2 + 2) - (x+h)(x^2 + 2)}{x(x+h)} \right] \times \frac{1}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{(x^3 + 2x^2h + xh^2 + 2x) - (x^3 + 2x + x^2h + 2h)}{x(x+h)} \right] \times \frac{1}{h} \\
&= \left(\frac{x^3 + 2x^2h + xh^2 + 2x - x^3 - x^2h - 2x - 2h}{x(x+h)} \right) \times \frac{1}{h} \\
&= \left(\frac{x^2h + xh^2 - 2h}{x(x+h)} \right) \times \frac{1}{h} \\
&= \frac{x^2 + xh - 2}{x(x+h)} \\
\text{ดังนั้น } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + xh - 2}{x(x+h)} \\
&= \frac{x^2 - 2}{x^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุดซึ่ง $x = 1$ เท่ากับ $\frac{x^2 - 2}{x^2} = -1$

ความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดซึ่ง $x = 1$ เท่ากับ -1

5. $y = 1 + 2x - 3x^2$ ที่จุด $(1, 0)$

วิธีทำ ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ คือ

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1 + 2(x+h) - 3(x+h)^2] - (1 + 2x - 3x^2)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2x + 2h - 3x^2 - 6xh - 3h^2 - 1 - 2x + 3x^2}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} (2 - 6x - 3h) \\
&= 2 - 6x
\end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด $(1, 0)$ ใด ๆ เท่ากับ $2 - 6(1) = -4$

ความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1, 0)$ เท่ากับ -4

6. $f(x) = x^2 + 2x + 5$ ณ จุด $(2, 13)$

วิธีทำ จาก $y = x^2 + 2x + 5$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = 2x + 2$

นั่นคือ ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ เท่ากับ $2x + 2$
 ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(2, 13)$ เท่ากับ $2(2) + 2 = 6$

7. $y = 2x^2 - x + 12$ ณ จุด $(1, 6)$

วิธีทำ จาก $y = 2x^2 - x + 12$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = 4x - 1$

นั่นคือ ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ เท่ากับ $4x - 1$
 ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(1, 6)$ เท่ากับ $4(1) - 1 = 3$

8. $y = (x^2 + 2)(1 - 3x)$ ณ จุด $x = -1$

วิธีทำ จาก $y = (x^2 + 2)(1 - 3x)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= (x^2 + 2) \frac{d}{dx}(1 - 3x) + (1 - 3x) \frac{d}{dx}(x^2 + 2) \\ &= (x^2 + 2)(-3) + (1 - 3x)(2x) \\ &= (-3x^2 - 6) + (2x - 6x^2) \\ &= -3x^2 - 6 + 2x - 6x^2 \\ &= -9x^2 + 2x - 6 \end{aligned}$$

นั่นคือ ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ เท่ากับ $-9x^2 + 2x - 6$
 ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $x = -1$ เท่ากับ $-9(-1)^2 + 2(-1) - 6 = -17$

9. $y = \sqrt{4 - x^2}$ ณ จุด $x = 0$

วิธีทำ จาก $y = \sqrt{4 - x^2}$

$$\begin{aligned} &= (4 - x^2)^{\frac{1}{2}} \\ \text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) \\ &= -x(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

นั่นคือ ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ เท่ากับ $\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $x = 0$ เท่ากับ $\frac{(0)}{\sqrt{4}} = 0$

10. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ ณ จุด $x = -3$

วิธีทำ จาก $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

$$= x^{-1} + x^{-2}$$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = -x^{-2} - 2x^{-3}$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

นั่นคือ ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ เท่ากับ $-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $x = -3$ เท่ากับ $-\frac{1}{(-3)^2} - \frac{2}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$

ตอนที่ 2 จงแสดงวิธีทำ

1. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 4x^2 + 2x - 6$ ที่จุด $(6, 4)$

วิธีทำ หาความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ

$$\text{จาก } y = 4x^2 + 2x - 6$$

$$\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} = 8x + 2$$

ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ เท่ากับ $8x + 2$

จะได้ ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(6, 4)$ เท่ากับ $8(6) + 2 = 50$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 4x^2 + 2x - 6$ ที่จุด $(6, 4)$ คือ

$$y - 4 = 50(x - 6)$$

$$y - 4 = 50x - 300$$

$$50x - y - 296 = 0$$

2. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 + 4$ ที่จุด $(2, 4)$

วิธีทำ หาความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ

$$\text{จาก } y = x^3 - 2x^2 + 4$$

$$\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$$

ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ เท่ากับ $3x^2 - 4x$

จะได้ ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(2, 4)$ เท่ากับ $3(2)^2 - 4(2) = 4$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 + 4$ ที่จุด $(2, 4)$ คือ

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

$$y - 4 = 4x - 8$$

$$4x - y - 4 = 0$$

3. จงหาสมการของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 2x + 3\sqrt{x}$ ที่จุด $x = 4$

วิธีทำ หาความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ

$$\begin{aligned} \text{จาก } y &= 2x + 3\sqrt{x} \\ &= 2x + 3x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= 2 + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2 + \frac{3}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ เท่ากับ $2 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

$$\text{จะได้ ความชันของเส้นโค้งที่จุด } x = 4 \text{ เท่ากับ } 2 + \frac{3}{2\sqrt{4}} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\text{จาก } y = 2x + 3\sqrt{x} \text{ ที่จุด } x = 4 \text{ จะได้ } y = 2(4) + 3\sqrt{4} = 14$$

เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 2x + 3\sqrt{x}$ ที่จุด $x = 4$ จะมีความชันเท่ากับ $-\frac{4}{11}$

ดังนั้น เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 2x + 3\sqrt{x}$ ที่จุด $(4, 14)$ คือ

$$y - 14 = -\frac{4}{11}(x - 4)$$

$$11y - 154 = -4(x - 4)$$

$$11y - 154 = -4x + 16$$

$$4x + 11y - 170 = 0$$

4. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 3)$ และขนานกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3$ ที่จุด $(1, 1)$

วิธีทำ หาความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ

$$\text{จาก } y = x^3$$

$$\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ เท่ากับ $3x^2$

$$\text{จะได้ ความชันของเส้นโค้งที่จุด } (1, 1) \text{ เท่ากับ } 3(1)^2 = 3$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 3)$ และขนานกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3$ ที่จุด

$$(1, 1) \text{ คือ } y - 3 = 3(x - 2)$$

$$y - 3 = 3x - 6$$

$$3x - y - 3 = 0$$

5. กำหนดให้เส้นโค้งมีสมการเป็น $y = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ จงหาสมการของเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้นโค้งที่จุดสัมผัส (3, 25)

วิธีทำ หาความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ

$$\text{จาก } y = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$$

$$\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 6x + 1$$

ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ เท่ากับ $6x^2 - 6x + 1$

จะได้ ความชันของเส้นโค้งที่จุด (3, 25) เท่ากับ $6(3)^2 - 6(3) + 1 = 37$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสซึ่งสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (3, 25) คือ

$$y - 25 = 37(x - 3)$$

$$y - 25 = 37x - 111$$

$$37x - y + 86 = 0$$

6. จากข้อ 13 จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส (3, 25)

วิธีทำ เนื่องจากเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส (3, 25) มีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{37}$

ดังนั้น สมการของเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส (3, 25) คือ

$$y - 25 = -\frac{1}{37}(x - 3)$$

$$37y - 925 = -x + 3$$

$$x + 37y - 928 = 0$$

7. ถ้าความชันของเส้นตรงซึ่งสัมผัสกราฟของ $y = 4 - x^2$ ที่จุด (a, b) มีค่าเท่ากับ -2 จงหาจุด (a, b)

วิธีทำ หาความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ

$$\text{จาก } y = 4 - x^2$$

$$\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} = -2x$$

จากโจทย์ ความชันที่จุด (a, b) มีค่าเท่ากับ -2

$$\text{นั่นคือ } -2 = -2x$$

$$x = 1$$

หาค่า y เมื่อ $x = 1$ จะได้

$$y = 4 - 1$$

$$= 3$$

ดังนั้น จุด (a, b) คือ (1, 3)

8. ถ้าเส้นตรง $y = -x^2 + 4x + 1$ ขนานกับเส้นตรง $2y - 4x + 1 = 0$ จงหาจุดสัมผัส

วิธีทำ หาความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ

$$\text{จาก } y = -x^2 + 4x + 1$$

$$\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} = -2x + 4$$

เนื่องจากเส้นตรง $2y - 4x + 1 = 0$ มีความชันเท่ากับ 2

และเส้นตรง $y = -x^2 + 4x + 1$ ขนานกับเส้นตรง $2y - 4x + 1 = 0$

$$\text{ดังนั้น } 2 = -2x + 4$$

$$x = 1$$

หาค่า y โดยแทน $x = 1$ ใน $y = -x^2 + 4x + 1$

$$\text{จะได้ } y = -1 + 4 + 1$$

$$y = 4$$

ดังนั้น จุดสัมผัสของเส้นตรง $y = -x^2 + 4x + 1$ ขนานกับเส้นตรง $2y - 4x + 1 = 0$ คือจุด $(1, 4)$

9. จงหาจุด (a, b) บนเส้นโค้ง $y = x^3 - 15x^2 + 27x - 2$ ซึ่งสัมผัสเส้นโค้งนี้ที่จุด (a, b) และขนานกับแกน x

วิธีทำ หาความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ

$$\text{จาก } y = x^3 - 15x^2 + 27x - 2$$

$$\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 30x + 27$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด (a, b) เท่ากับ $3a^2 - 30a + 27$

แต่เส้นสัมผัสขนานแกน x จะได้ความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ 0

$$\text{เพราะฉะนั้น } 3a^2 - 30a + 27 = 0$$

$$a^2 - 10a + 9 = 0$$

$$(a - 1)(a - 9) = 0$$

$$a = 1 \text{ หรือ } 9$$

เนื่องจากจุด (a, b) อยู่บนเส้นโค้ง $y = x^3 - 15x^2 + 27x - 2$

$$\text{ดังนั้น } b = a^3 - 15a^2 + 27a - 2$$

$$\text{แทนค่า } a = 1 \text{ จะได้ } b = 11$$

$$\text{แทนค่า } a = 9 \text{ จะได้ } b = -245$$

ดังนั้น พิกัดของจุด (a, b) คือ $(1, 11)$ หรือ $(9, -245)$

10. ถ้า L เป็นเส้นตรงซึ่งมีความชันเท่ากับ 2 และสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 + 2$ แล้ว จงหาสมการเส้นตรง

วิธีทำ หาความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ

$$\text{จาก } y = x^2 + 2$$

$$\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} = 2x$$

โจทย์กำหนดให้ L เป็นเส้นตรงซึ่งมีความชันเท่ากับ 2

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } 2 &= 2x \\ x &= 1 \end{aligned}$$

หาจุดสัมผัส

$$\begin{aligned} \text{จาก } y &= x^2 + 2 \\ &= 1 + 2 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น เส้นตรง L สัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 + 2$ ที่จุด $(1, 3)$

สมการเส้นตรง L คือ $y - 3 = 2(x - 1)$

$$y = 2x - 2 + 3$$

$$y = 2x + 1$$