

คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของหน่วยการเรียนรู้เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ประกอบด้วยแบบฝึกทักษะทั้งหมด 10 เล่ม ดังนี้

- เล่ม 1 ลิมิตของฟังก์ชัน
- เล่ม 2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน
- เล่ม 3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
- เล่ม 4 อัตราการเปลี่ยนแปลง
- เล่ม 5 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
- เล่ม 6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร
- เล่ม 7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ
- เล่ม 8 ความชันของเส้นโค้ง
- เล่ม 9 อนุพันธ์อันดับสูง
- เล่ม 10 การประยุกต์ของอนุพันธ์

โดยในแบบฝึกทักษะแต่ละเล่ม ประกอบด้วยผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ครอบคลุมทั้งด้านความรู้ ด้านทักษะกระบวนการและด้านคุณลักษณะ ซึ่งกิจกรรมของแบบฝึกทักษะแต่ละเล่มเสร็จสมบูรณ์ในตัวเอง ผู้เรียนสามารถใช้ได้ด้วยตนเอง

สำหรับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่ม 6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14-18 เรื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร มีจุดมุ่งหมายเพื่อให้นักเรียนหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้สูตรได้ อีกทั้งยังเป็นแนวทางในการปฏิรูปกระบวนการจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ส่งเสริมผู้เรียนได้ฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์และแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง อันจะทำให้ผู้เรียนเกิดความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหามากยิ่งขึ้น เกิดความคงทนในการเรียนรู้และสามารถนำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ การค้นคว้าหาความรู้ของนักเรียนและเป็นประโยชน์ต่อผู้สนใจ เพื่อนครูและวงการศึกษาต่อไป

พนารัตน์ รอดภัย



สารบัญ

	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	ข
คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับครูผู้สอน	ค
คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน	ง
ผลการเรียนรู้	จ
จุดประสงค์การเรียนรู้	จ
สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	จ
ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน	ฉ
สาระสำคัญ	ช
แบบทดสอบก่อนเรียน	1
กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน	3
ยังจำได้ไหม	4
ใบความรู้ 6.1 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร	5
แบบฝึกทักษะ 6.1	17
แบบฝึกทักษะ 6.2	27
แบบทดสอบหลังเรียน	28
กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน	30
แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน	31
แบบบันทึกความก้าวหน้าของแบบฝึกทักษะ	32
บรรณานุกรม	33
ภาคผนวก	35
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	36
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	37
เฉลยแบบฝึกทักษะ 6.1	38
เฉลยแบบฝึกทักษะ 6.2	49

คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับครูผู้สอน

1. ศึกษาแผนการจัดการเรียนรู้และการใช้แบบฝึกทักษะ
2. ศึกษาและทำความเข้าใจเนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้และการดำเนินการสอน เพื่อให้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็นไปตามลำดับขั้นตอน
3. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน
4. ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้
5. ให้คำแนะนำและความช่วยเหลือแก่นักเรียนเมื่อมีปัญหา ตามความเหมาะสมกับความสามารถและศักยภาพของนักเรียนที่แตกต่างกัน
6. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน
7. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ใช้เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน 5 ชั่วโมง



คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับผู้เรียน

1. ศึกษาการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
2. ศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้ เพื่อให้ทราบว่านักเรียนต้องรู้และปฏิบัติสิ่งใดบ้างหลังจากจบบทเรียนแล้ว
3. ทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อตรวจสอบความรู้เดิมในเรื่องที่เรียน จากนั้นตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน
4. ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้เข้าใจ แล้วทำแบบฝึกทักษะตามลำดับขั้นตอน
5. หากไม่เข้าใจหรือมีปัญหา นักเรียนสามารถปรึกษาและแลกเปลี่ยนองค์ความรู้
6. ทำแบบทดสอบหลังเรียนแล้วตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน แล้วเปรียบเทียบกับคะแนนทดสอบก่อนเรียน
7. หากยังมีข้อสงสัยและไม่เข้าใจให้กลับไปทบทวนบทเรียนจากแบบฝึกทักษะอีกครั้ง
8. นักเรียนควรซื่อสัตย์ต่อตนเอง โดยไม่เปิดดูเฉลยระหว่างศึกษาแบบฝึกทักษะ เพื่อนักเรียนจะได้พัฒนาการเรียนรู้ของตนเองอย่างเต็มความสามารถ



ผลการเรียนรู้

หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้สูตรได้

ด้านทักษะกระบวนการ

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความซื่อสัตย์ สุจริต
2. มีวินัย
3. ใฝ่เรียนรู้
4. มุ่งมั่นในการทำงาน

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

1. ความสามารถในการสื่อสาร
2. ความสามารถในการคิด
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา



ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน



สาระสำคัญ

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรมีดังนี้

สูตรที่ 1 ถ้า $f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $f'(x) = 0$

สูตรที่ 2 ถ้า $f(x) = x$ แล้ว $f'(x) = 1$

สูตรที่ 3 ถ้า $f(x) = x^n$ แล้ว $f'(x) = nx^{n-1}$

สูตรที่ 4 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

สูตรที่ 5 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

สูตรที่ 6 ถ้า c เป็นค่าคงตัว และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(cf)'(x) = c(f'(x))$

สูตรที่ 7 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

สูตรที่ 8 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

แบบทดสอบก่อนเรียน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เล่ม 6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกที่สุด

1. กำหนด $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$ แล้ว $f'(x)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $3x^4 + 4x^3 - x^2 + 5x$

ข. $3x^3 + 4x^2 - x + 5$

ค. $3x^2 + 4x - 1$

ง. $6x^2 + 2x - 1$

2. กำหนด $f(x) = 3x + 5$ แล้ว $f'(2)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 3

ข. 4

ค. 5

ง. 6

3. กำหนด $y = x^{\frac{1}{2}}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $x^{\frac{1}{2}}$

ข. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ค. $\frac{2}{\sqrt{x}}$

ง. $2\sqrt{x}$

4. กำหนด $f(x) = \frac{3}{x+1}$ แล้ว $f'(2)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $-\frac{3}{(x+1)^2}$

ข. $\frac{-3}{x+1}$

ค. $\frac{3}{x+1}$

ง. $\frac{3}{(x+1)^2}$



5. กำหนด $y = (3x + 7)\left(\frac{1}{x} + 8\right)$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $3 + \frac{3}{x} - \frac{14}{x^2}$

ข. $8 + \frac{6}{x^2} - \frac{14}{x^3}$

ค. $24 + \frac{3}{x} - \frac{14}{x^2}$

ง. $24 - \frac{3}{x} - \frac{14}{x^2}$

6. กำหนด $f(x) = \frac{x^3 + 16}{x^2}$ แล้ว $f'(x)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{x^4 - 32}{x^4}$

ข. $\frac{x^4 - 32}{x^2}$

ค. $\frac{x^3 - 32}{x^3}$

ง. $\frac{x^4 - 32}{x^3}$

7. กำหนด $f(x) = \frac{1}{x^5}$ แล้ว $f(2)$ และ $f'(2)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{1}{32}, -\frac{5}{64}$

ข. $\frac{1}{32}, \frac{1}{64}$

ค. $\frac{1}{8}, -\frac{1}{64}$

ง. $\frac{1}{8}, -\frac{5}{64}$

8. กำหนด $f(x) = 6x^7 - 8x^5 + 3x^2 - 4x - 25$ แล้ว $f'(1) - f(-1)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 48

ข. 12

ค. -12

ง. -20

9. กำหนด $f(x) = \frac{x+1}{x}$ แล้ว $f'(5)$ และ $f'(-5)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $-\frac{1}{10}, -\frac{1}{10}$

ข. $-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$

ค. $-\frac{1}{25}, \frac{1}{25}$

ง. $-\frac{1}{25}, -\frac{1}{25}$

10. กำหนด $f(x) = (4x - x^2)(x^2 + 3)$ แล้ว $f'(0) \cdot f'(2)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 2,448

ข. 1,248

ค. 104

ง. 0

กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

ยังจำได้ไหม



จำได้หรือเปล่า เราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้อย่างไร

อ้อ จำได้ซิ เราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้โดยใช้ลิมิต

คือ.....



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ใบความรู้ 6.1

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้บทนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชันในรูปลิมิตนั้นค่อนข้างยุ่งยาก ดังนั้นเพื่อให้การหาอนุพันธ์สามารถทำได้สะดวกและรวดเร็ว จึงได้มีการสร้างสูตรที่ใช้สำหรับการหาอนุพันธ์ขึ้นมาดังต่อไปนี้

สูตรที่ 1 ถ้า $f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $f'(x) = 0$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $y = -5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(-5) \\ &= 0 \end{aligned}$$

สูตรที่ 2 ถ้า $f(x) = x$ แล้ว $f'(x) = 1$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

สูตรที่ 3 ถ้า $f(x) = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริง แล้ว $f'(x) = nx^{n-1}$

$$\begin{aligned}
 \text{พิสูจน์} \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \right) \\
 &= nx^{n-1}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = x^3$ จงหา $f'(x)$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \text{จาก} \quad f(x) &= x^3 \\
 \text{จะได้} \quad f'(x) &= 3x^2
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ จงหา $f'(x)$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \text{จาก} \quad f(x) &= \frac{1}{x^2} \\
 \text{เนื่องจาก} \quad \frac{1}{x^2} &= x^{-2} \\
 \text{ดังนั้น} \quad f'(x) &= -2x^{-2-1} \\
 &= -2x^{-3} \\
 &= -\frac{2}{x^3}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $y = \sqrt[3]{x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ	เนื่องจาก	$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$
	ดังนั้น	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3} - 1}$
		$= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$
		$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

สูตรที่ 4 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

พิสูจน์ ให้ $F(x) = f(x) + g(x)$

จะได้ $F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $y = x^2 + x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ	จาก	$y = x^2 + x$
	จะได้	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + x)$
		$= \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x)$
		$= 2x + 1$

สูตรที่ 5 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

พิสูจน์ ให้ $F(x) = f(x) - g(x)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - g(x+h)] - [f(x) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] - [g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= f'(x) - g'(x) \end{aligned}$$

จากสูตรที่ 4 และสูตรที่ 5 เราจะขยายจำนวนฟังก์ชันที่บวกลบกันเป็นกี่ฟังก์ชันก็ได้ตามตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $y = x^5 + x^4 - x^3 - x + 5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

จาก $y = x^5 + x^4 - x^3 - x + 5$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^5 + x^4 - x^3 - x + 5) \\ &= \frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(x^4) - \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5) \\ &= 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 1 + 0 \\ &= 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

สูตรที่ 6 ถ้า c เป็นค่าคงตัว และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(cf)'(x) = c(f'(x))$

พิสูจน์ ให้ $F(x) = cf(x)$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} c \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\
 &= c \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\
 &= c(f'(x))
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $y = 2x^3 - 3x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = 2x^3 - 3x$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(2x^3 - 3x) \\
 &= \frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(3x) \\
 &= 2 \frac{d}{dx}(x^3) - 3 \frac{d}{dx}(x) \\
 &= 2(3x^2) - 3(1) \\
 &= 6x^2 - 3
 \end{aligned}$$

สูตรที่ 7 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

พิสูจน์ ให้ $F(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $y = (x^2 - 5x)(3x + 2)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } y &= (x^2 - 5x)(3x + 2) \\
 \text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^2 - 5x)(3x + 2) \\
 &= (x^2 - 5x) \frac{d}{dx}(3x + 2) + (3x + 2) \frac{d}{dx}(x^2 - 5x) \\
 &= (x^2 - 5x)(3 + 0) + (3x + 2)(2x - 5) \\
 &= 3x^2 - 15x + 6x^2 + 4x - 15x - 10 \\
 &= 9x^2 - 26x - 10
 \end{aligned}$$

สูตรที่ 8 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

พิสูจน์ ให้ $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h} \right] - \left[\frac{f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \right]}{g(x+h) \cdot g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] - \left[f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]}{g(x+h) \cdot g(x)} \\
 &= \frac{\left[\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] - \left[\lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x)} \\
 &= \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 9 กำหนดให้ $y = \frac{x-3}{2x+5}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \frac{x-3}{2x+5}$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{(2x+5)\frac{d}{dx}(x-3) - (x-3)\frac{d}{dx}(2x+5)}{(2x+5)^2} \\ &= \frac{(2x+5)(1-0) - (x-3)(2+0)}{(2x+5)^2} \\ &= \frac{2x+5-2x+6}{(2x+5)^2} \\ &= \frac{11}{(2x+5)^2}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดให้ $y = \frac{(x^2+1)(2x-3)}{x^3+1}$ จงหา $f'(1)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{(x^2+1)(2x-3)}{x^3+1}$

$$= \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 3}{x^3 + 1}$$

จะได้ $f'(x) = \frac{(x^3+1)(6x^2-6x+2-0) - (2x^3-3x^2+2x-3)(3x^2+0)}{(x^3+1)^2}$

ดังนั้น $f'(1) = \frac{(1+1)(6-6+2) - (2-3+2-3)(3)}{(1+1)^2}$

$$= \frac{(2)(2) - (-2)(3)}{4}$$

$$= \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

หาผลคูณของตัวเศษ แล้วหาอนุพันธ์โดยใช้สูตรผลหาร

จากตัวอย่างที่ 10 เราอาจหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ได้อีกวิธีหนึ่ง โดยไม่ต้องเขียนฟังก์ชัน f ใหม่ เป็นการหาอนุพันธ์โดยใช้สูตร 7 และ 8 ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } f(x) &= \frac{(x^2 + 1)(2x - 3)}{x^3 + 1} \\
 \text{ดังนั้น } f'(x) &= \frac{(x^3 + 1) \frac{d}{dx} [(x^2 + 1)(2x - 3)] - (x^2 + 1)(2x - 3) \frac{d}{dx} (x^3 + 1)}{(x^3 + 1)^2} \\
 &= \frac{(x^3 + 1) \left[(x^2 + 1) \frac{d}{dx} (2x - 3) + (2x - 3) \frac{d}{dx} (x^2 + 1) \right] - (x^2 + 1)(2x - 3)(3x^2)}{(x^3 + 1)^2} \\
 &= \frac{(x^3 + 1) [(x^2 + 1)(2) + (2x - 3)(2x)] - (x^2 + 1)(2x - 3)(3x^2)}{(x^3 + 1)^2} \\
 &= \frac{(x^3 + 1) [(x^2 + 1)(2) + (2x - 3)(2x)] - (x^2 + 1)(2x - 3)(3x^2)}{(x^3 + 1)^2} \\
 \text{ดังนั้น } f'(1) &= \frac{(1+1) [(1+1)(2) + (2-3)(2)] - (1+1)(2-3)(3)}{(1+1)^2} \\
 &= \frac{4 + 6}{4} \\
 &= \frac{10}{4} \\
 &= \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

ทั้งสองวิธีได้คำตอบเหมือนกันค่ะ แล้วแต่ว่าใครถนัดวิธีไหน

การหาอนุพันธ์ เรามักจะเรียกกันย่อ ๆ ว่า ดิฟนะคะ
เพื่อน ๆ จำสูตรได้หรือเปล่าคะ ลองมาใช้เทคนิคช่วยจำกันนะคะ

1. ดิฟค่าคงตัว ได้ 0
2. ดิฟผลคูณให้ท่องว่า หน้าดิฟหลัง + หลังดิฟหน้า
ข้างหน้าลบ - ข้างหลังบวก
3. ดิฟผลหารให้ท่องว่า



เราไปศึกษาตัวอย่างการนำเทคนิคช่วยจำไปใช้กันดีกว่าครับ



ดิฟค่าคงตัวได้ 0 เช่น

$$1. f(x) = 5 \quad \text{ดังนั้น} \quad f'(x) = 0$$

$$2. f(x) = 8 \quad \text{ดังนั้น} \quad f'(x) = 0$$



ดิฟผลคูณให้ท่องว่า หน้าดิฟหลัง + หลังดิฟหน้า เช่น

$$f(x) = (3x - 2)(2x + 5) \quad \text{สมมติให้} \quad \begin{array}{l} \text{หน้าคือ} (3x - 2) \\ \text{หลังคือ} (2x + 5) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad f'(x) &= (3x-2) \frac{d}{dx} (2x+5) + (2x+5) \frac{d}{dx} (3x-2) \\ &= (3x - 2)(2) + (2x + 5)(3) \\ &= 6x - 4 + 6x + 15 \\ &= 12x + 11 \end{aligned}$$



ดิफलหารให้ท่องเที่ยวว่า

ส่วนดิพบบ - บบดิพลาง
ส่วนกักลางลาง

เช่น

$$f(x) = \frac{3x-2}{2x+5} \quad \text{ส่วนดิให้} \quad \text{บบคือ} \quad (3x - 2)$$

ลางคือ $(2x + 5)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad f'(x) &= \frac{(2x+5) \frac{d}{dx} (3x-2) - (3x-2) \frac{d}{dx} (2x+5)}{(2x+5)^2} \\ &= \frac{(2x+5)(3) - (3x-2)(2)}{(2x+5)^2} \\ &= \frac{(6x+15) - (6x-4)}{(2x+5)^2} \\ &= \frac{6x + 15 - 6x + 4}{(2x+5)^2} \\ &= \frac{19}{(2x+5)^2} \end{aligned}$$





แบบฝึกทักษะที่ 6.1

คำชี้แจง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ (ข้อละ 1 คะแนน คะแนนเต็ม 20 คะแนน)

1. ถ้า $y = -10$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. ถ้า $f(x) = 20$ แล้ว จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. ถ้า $f(x) = 4^3$ แล้ว จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. ถ้า $y = \sqrt[3]{x}$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. ถ้า $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ แล้ว จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. กำหนดให้ $y = -2\sqrt{x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. ให้ $y = x^3 + 2x^2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. ให้ $f(x) = 2x^6 + 3x^2 + 3x$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. กำหนดให้ $y = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$ จงหา $f'(4)$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

11. กำหนดให้ $f(x) = 2x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + 4$ จงหา $f'(1)$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

12. กำหนดให้ $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ จงหา $f'(1)$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

13. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = (4x - x^2)(x^2 + 3)$ โดยใช้สูตรที่ 7

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

14. กำหนดให้ $y = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)$ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้สูตรที่ 7

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

15. กำหนดให้ $y = x^2(-3x^2 - 2)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

16. กำหนดให้ $y = (x^4 + 3)(-4x^5 + 5x^4 + 5)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

17. กำหนดให้ $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$ จงหา $f'(2)$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

18. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \frac{x^5 - 3x^2 + 5x - 2}{x^2}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

19. กำหนดให้ $y = \frac{x^2 + 2}{x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

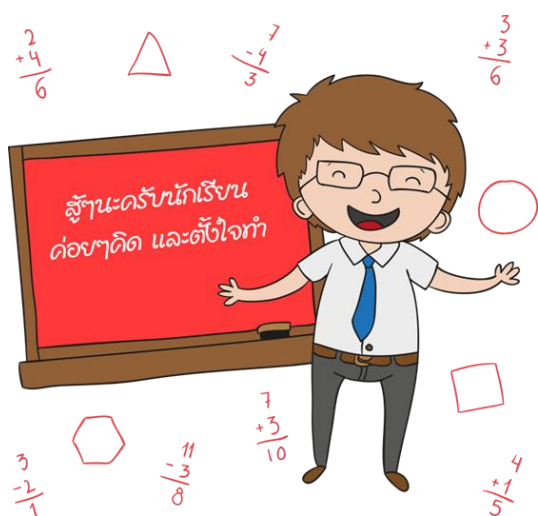
.....

.....

.....

20. กำหนดให้ $f(x) = \frac{4x^5 + 2x^2}{3x^4 + 5}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ



แบบฝึกทักษะ 6.2

คำชี้แจง ให้นักเรียนเลือกคำตอบทางขวาแล้วนำตัวอักษรมาเติมหน้าข้อให้ถูกต้อง

..... 1. $f(x) = 5x^{18}$

ก. $f'(x) = -\frac{9}{x^4}$

..... 2. $f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{5}{4}}$

ข. $f'(x) = \frac{10x^4}{x^{10} - 10x^5 + 25}$

..... 3. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

ค. $f'(x) = 90x^{17}$

..... 4. $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^{\frac{5}{3}} + 2x$

ง. $f'(x) = \frac{8}{3}x^3 + 5 + \frac{3}{x^4}$

..... 5. $f(x) = \frac{2}{3}x^4 + 5x - x^{-3}$

จ. $f'(x) = \frac{9x^6 - 24x^3 - 18x^2}{9x^6 - 12x^3 + 4}$

..... 6. $f(x) = (x^4 + 3)(-4x^5 + 5x^4 + 5)$

ฉ. $f'(x) = \frac{15}{16}x^{\frac{1}{4}}$

..... 7. $f(x) = (5x^4 - 3x^2 - 1)(-5x^2 + 3)$

ช. $f'(x) = \frac{-5x^6 - 4x^3 - 30x^2}{2x^8 - 8x^4 + 8}$

..... 8. $f(x) = \frac{2}{x^5 - 5}$

ซ. $f'(x) = -150x^5 + 120x^3 - 8x$

..... 9. $f(x) = \frac{3x^4 + 2}{3x^3 - 2}$

ณ. $f'(x) = -2x^3 + 5x^{\frac{2}{3}} + 2$

..... 10. $f(x) = \frac{3x^4 + 5x^3 - 5}{2x^4 - 4}$

ญ. $f'(x) = -36x^8 + 40x^7 - 60x^4 + 80x^3$

แบบทดสอบหลังเรียน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เล่ม 6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกต้องที่สุด

1. กำหนด $y = x^{\frac{1}{2}}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $x^{-\frac{1}{2}}$

ข. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ค. $\frac{2}{\sqrt{x}}$

ง. $2\sqrt{x}$

2. กำหนด $y = (3x + 7)\left(\frac{1}{x} + 8\right)$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $3 + \frac{3}{x} - \frac{14}{x^2}$

ข. $8 + \frac{6}{x^2} - \frac{14}{x^3}$

ค. $24 + \frac{3}{x} - \frac{14}{x^2}$

ง. $24 - \frac{3}{x^2} - \frac{14}{x^3}$

3. กำหนด $f(x) = \frac{3}{x+1}$ แล้ว $f'(2)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $-\frac{3}{(x+1)^2}$

ข. $\frac{-3}{x+1}$

ค. $\frac{3}{x+1}$

ง. $\frac{3}{(x+1)^2}$



4. กำหนด $f(x) = \frac{1}{x^5}$ แล้ว $f(2)$ และ $f'(2)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{1}{32}, \frac{1}{64}$

ข. $\frac{1}{32}, -\frac{5}{64}$

ค. $\frac{1}{8}, -\frac{5}{64}$

ง. $\frac{1}{8}, -\frac{1}{64}$

5. กำหนด $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$ แล้ว $f'(x)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $3x^4 + 4x^3 - x^2 + 5x$

ข. $3x^3 + 4x^2 - x + 5$

ค. $3x^2 + 4x - 1$

ง. $6x^2 + 2x - 1$

6. กำหนด $f(x) = 3x + 5$ แล้ว $f'(2)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 3

ข. 4

ค. 5

ง. 6

7. กำหนด $f(x) = \frac{x^3 + 16}{x^2}$ แล้ว $f'(x)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{x^4 - 32}{x^4}$

ข. $\frac{x^4 - 32}{x^2}$

ค. $\frac{x^3 - 32}{x^3}$

ง. $\frac{x^4 - 32}{x^3}$

8. กำหนด $f(x) = 6x^7 - 8x^5 + 3x^2 - 4x - 25$ แล้ว $f'(1) - f(-1)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 48

ข. 12

ค. -12

ง. -20

9. กำหนด $f(x) = (4x - x^2)(x^2 + 3)$ แล้ว $f'(0) \cdot f'(2)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 2,448

ข. 1,248

ค. 104

ง. 0

10. กำหนด $f(x) = \frac{x+1}{x}$ แล้ว $f'(5)$ และ $f'(-5)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $-\frac{1}{10}, -\frac{1}{10}$

ข. $-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$

ค. $-\frac{1}{25}, \frac{1}{25}$

ง. $-\frac{1}{25}, -\frac{1}{25}$

กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน
 แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
 เล่ม 6 การอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร

ชื่อ.....ชั้น..... เลขที่.....
 โรงเรียนบ้านไร่วิทยา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	ความก้าวหน้า	คิดเป็นร้อยละ
การทดสอบก่อนเรียน	10			
การทดสอบหลังเรียน	10			



แบบบันทึกความก้าวหน้าของแบบฝึกทักษะ
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
เล่ม 6 การอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร

ชื่อ.....ชั้น..... เลขที่.....
โรงเรียนบ้านไร่วิทยา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

แบบฝึกทักษะที่	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	คิดเป็นร้อยละ	ผ่านเกณฑ์*	ไม่ผ่านเกณฑ์**
6.1	20				
6.2	10				
รวมทั้งหมด	30				
เฉลี่ย					
คิดเป็นร้อยละ					

* ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
** ไม่ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนน้อยกว่าร้อยละ 80 ของคะแนนเต็ม



บรรณานุกรม

- กนกวลี อุษณกรกุล และรณชัย มาเจริญทรัพย์. (2548). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด. (2554). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- กมลเอก ไทยเจริญ. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง จำกัด.
- กานดา ลือสุทธิวิบูลย์ และยุพิน จิรสุขานนท์. (2548). **สรุปคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ม. 4 – 5 – 6 รายวิชาพื้นฐานและรายวิชาเพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์ Pure Pure ม.6 (2 ภาคเรียน) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ Entrance คณิตศาสตร์ 15 พ.ศ.**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด.
- เชษฐ์ ชั้นสกุลดี. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ PAT 1 ความถนัดทางคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: ห้างหุ้นส่วนจำกัดรุ่งเรืองสาส์นการพิมพ์.
- ณรงค์ ปั่นนิ่ม และคณะ. (2537). **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์รวม ม.4-5-6**. กรุงเทพฯ: ภูมิบัณฑิตการพิมพ์ จำกัด.
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2**. กรุงเทพฯ: แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด.
- ประชา ศิวเวทกุล. (2555). **กฏแจกคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 รายวิชาเพิ่มเติม เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- เลิศ สิทธิโกศล. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์แผนใหม่ แคลคูลัส ม.ปลาย 4-5-6**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ แมสพับลิชชิ่ง.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว. (2554). **คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สมัย เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.4-5-6 สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง จำกัด. (ม.ป.ป.). **Mathematics Problems โจทย์คณิตศาสตร์ ม. 4-5-6**. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง จำกัด.
- สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพรณ เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน + เพิ่มเติม เล่มที่ 6 ช่วงชั้นที่ 4 (มัธยมศึกษาปีที่ 4-6)**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง จำกัด.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาติบุตร. (2556). แคลคูลัส Calculus 1

ฉบับเสริมประสบการณ์. กรุงเทพฯ: บริษัทพิมพ์ดีการพิมพ์ จำกัด.

สุเทพ จันทรสมศักดิ์. (ม.ป.ป.). คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015.

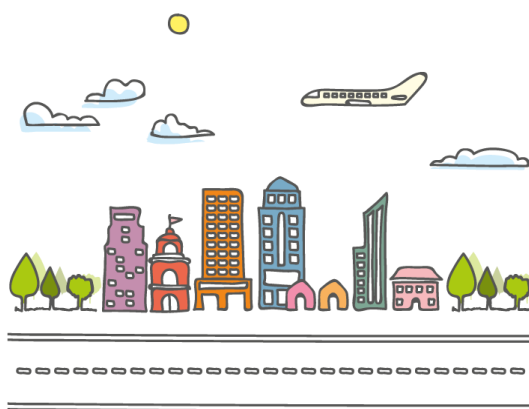
กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ภูมิบัณฑิต.

อเนก หิรัญ. (2544). คณิตศาสตร์ ม.6 ค 015. กรุงเทพฯ: หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์ เซ็นเตอร์.

_____. (ม.ป.ป.). แบบฝึกหัดพื้นฐาน วิชาคณิตศาสตร์ ม.6 ค 015. กรุงเทพฯ:

หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

Finney ,Ross L. and other. (2007). Calculus Graphical, Numerical, Algebraic
Third Edition. Upper Saddle River. New Jersey: Prentice Hall.



ภาคผนวก

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อ	คำตอบ
1	ค
2	ก
3	ข
4	ค
5	ง
6	ค
7	ก
8	ค
9	ง
10	ข

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ	คำตอบ
1	ข
2	ง
3	ค
4	ข
5	ค
6	ก
7	ค
8	ค
9	ข
10	ง

เฉลยแบบฝึกทักษะ 6.1

1. ถ้า $y = -10$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = -10$

$$\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(-10)$$

$$= 0$$

2. ถ้า $f(x) = 20$ แล้ว จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 20$

$$\text{จะได้ } f'(x) = \frac{d}{dx}(20)$$

$$= 0$$

3. ถ้า $f(x) = 4^3$ แล้ว จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 4^3$

$$\text{จะได้ } f'(x) = \frac{d}{dx}(4^3)$$

$$= 0$$

4. ถ้า $y = \sqrt[3]{x}$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \sqrt[3]{x}$

$$= x^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{3}})$$

$$= \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3} - 1}$$

$$= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

5. ถ้า $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ แล้ว จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}}) \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3} - 1} \\ &= \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\end{aligned}$$

6. กำหนดให้ $y = -2\sqrt[4]{x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = -2\sqrt[4]{x}$

$$\begin{aligned}&= -2x^{\frac{1}{4}} \\ \text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(-2x^{\frac{1}{4}}) \\ &= -2\left(\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4} - 1}\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}} \\ &= -\frac{1}{2x^{\frac{3}{4}}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}}\end{aligned}$$

7. ให้ $y = x^3 + 2x^2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = x^3 + 2x^2$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3 + 2x^2) \\ &= \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(2x^2) \\ &= 3x^{3-1} + 2(2x^{2-1}) \\ &= 3x^2 + 4x\end{aligned}$$

8. ให้ $f(x) = 2x^6 + 3x^2 + 3x$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 2x^6 + 3x^2 + 3x$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } f'(x) &= \frac{d}{dx}(2x^6 + 3x^2 + 3x) \\ &= \frac{d}{dx}(2x^6) + \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(3x) \\ &= 2(6x^{5-1}) + 3(2x^{2-1}) + 3(1) \\ &= 12x^5 + 6x + 3\end{aligned}$$

9. กำหนดให้ $y = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x^{-1}) - \frac{d}{dx}(x^{-2}) \\ &= 1 + (-x^{-2}) + 2x^{-3}\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

10. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$ จงหา $f'(4)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$

จะได้ $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{-2}$

ดังนั้น $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}} + x^{-2})$

$$= \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{d}{dx}(x^{-2})$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-3}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}$$

จะได้ $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} - \frac{2}{4^3}$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{64}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{32}$$

$$= \frac{8 - 1}{32}$$

$$= \frac{7}{32}$$

11. กำหนดให้ $f(x) = 2x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + 4$ จงหา $f'(1)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{จาก } f(x) &= 2x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + 4 \\ \text{จะได้ } f'(x) &= \frac{d}{dx} [2x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + 4] \\ &= \frac{d}{dx} (2x^{\frac{2}{3}}) - \frac{d}{dx} (6x^{\frac{1}{3}}) + \frac{d}{dx} (4) \\ &= 2 \frac{d}{dx} (x^{\frac{2}{3}}) - 6 \frac{d}{dx} (x^{\frac{1}{3}}) + \frac{d}{dx} (4) \\ &= 2 \left(\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \right) - 6 \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \right) + 0 \\ &= \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} \\ \text{ดังนั้น } f'(1) &= \frac{4}{3} - 2 \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

12. กำหนดให้ $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ จงหา $f'(1)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{จาก } f(x) &= 2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \text{จะได้ } f(x) &= 2x^3 - x^{-\frac{1}{2}} \\ \text{ดังนั้น } f'(x) &= \frac{d}{dx} (2x^3 - x^{-\frac{1}{2}}) \\ &= 2 \frac{d}{dx} (x^3) - \frac{d}{dx} (x^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(3x^2) - \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) \\
 &= 6x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \\
 \text{จะได้ } f'(1) &= 6 + \frac{1}{2} \\
 &= 6\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

13. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = (4x - x^2)(x^2 + 3)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } y &= (4x - x^2)(x^2 + 3) \\
 \text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= (4x - x^2) \frac{d}{dx}(x^2 + 3) + (x^2 + 3) \frac{d}{dx}(4x - x^2) \\
 &= (4x - x^2)(2x + 0) + (x^2 + 3)(4 - 2x) \\
 &= (4x - x^2)(2x) + (x^2 + 3)(4 - 2x) \\
 &= (8x^2 - 2x^3) + (4x^2 + 12 - 8x^3 - 6x) \\
 &= -10x^3 + 12x^2 - 6x + 12
 \end{aligned}$$

14. กำหนดให้ $y = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } y &= (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x) \\
 \text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= (2x^4 - 1) \frac{d}{dx}(5x^3 + 6x) + (5x^3 + 6x) \frac{d}{dx}(2x^4 - 1) \\
 &= (2x^4 - 1)(15x^2 + 6) + (5x^3 + 6x)(8x^3 - 0) \\
 &= 30x^6 - 15x^2 + 12x^4 - 6 + 40x^6 + 48x^4 \\
 &= 70x^6 + 60x^4 - 15x^2 - 6
 \end{aligned}$$

15. กำหนดให้ $y = x^2(-3x^2 - 2)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ สามารถแสดงวิธีหาคำตอบได้ 2 กรณี นักเรียนเลือกวิธีใดก็ได้

วิธีที่ 1 จาก $y = x^2(-3x^2 - 2)$
 จะได้ $y = -3x^4 - 2x^2$
 ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(-3x^4 - 2x^2)$

$$= \frac{d}{dx}(-3x^4) - \frac{d}{dx}(2x^2)$$

$$= -3 \frac{d}{dx}(x^4) - 2 \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= -3(4x^3) - 2(2x)$$

$$= -12x^3 - 4x$$

วิธีที่ 2 จาก $y = x^2(-3x^2 - 2)$
 จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[x^2(-3x^2 - 2)]$

$$= x^2 \frac{d}{dx}(-3x^2 - 2) + (-3x^2 - 2) \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2(-6x - 0) + (-3x^2 - 2)(2x)$$

$$= -6x^3 + (-6x^3 - 4x)$$

$$= -12x^3 - 4x$$

16. กำหนดให้ $y = (x^4 + 3)(-4x^5 + 5x^4 + 5)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ สามารถแสดงวิธีหาคำตอบได้ 2 กรณี นักเรียนเลือกทำวิธีใดก็ได้

วิธีที่ 1 จาก $y = (x^4 + 3)(-4x^5 + 5x^4 + 5)$
 จะได้ $y = -4x^9 + 5x^8 + 5x^4 - 12x^5 + 15x^4 + 15$

$$= -4x^9 + 5x^8 - 12x^5 + 20x^4 + 15$$

 ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(-4x^9 + 5x^8 - 12x^5 + 20x^4 + 15)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d}{dx}(-4x^9) + \frac{d}{dx}(5x^8) - \frac{d}{dx}(12x^5) + \frac{d}{dx}(20x^4) + \frac{d}{dx}(15) \\
 &= -36x^8 + 40x^7 - 60x^4 + 80x^3
 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 จาก $y = (x^4 + 3)(-4x^5 + 5x^4 + 5)$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[(x^4 + 3)(-4x^5 + 5x^4 + 5)] \\
 &= (x^4 + 3) \frac{d}{dx}(-4x^5 + 5x^4 + 5) + (-4x^5 + 5x^4 + 5) \frac{d}{dx}(x^4 + 3) \\
 &= (x^4 + 3)(-20x^4 + 20x^3 + 0) + (-4x^5 + 5x^4 + 5)(4x^3 + 0) \\
 &= -20x^8 + 20x^7 - 60x^4 + 60x^3 - 16x^8 + 20x^7 + 20x^3 \\
 &= -36x^8 + 40x^7 - 60x^4 + 80x^3
 \end{aligned}$$

17. กำหนดให้ $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$ จงหา $f'(2)$

วิธีทำ สามารถแสดงวิธีหาคำตอบได้ 2 กรณี นักเรียนเลือกทำวิธีใดก็ได้

วิธีที่ 1 จาก $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } f(x) &= x^4 - 4x^2 + x^2 - 4 \\
 &= x^4 - 3x^2 - 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^4 - 3x^2 - 4) \\
 &= \frac{d}{dx}(x^4) - \frac{d}{dx}(3x^2) - \frac{d}{dx}(4) \\
 &= 4x^3 - 6x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } f'(2) &= 4(2)^3 - 6(2) \\
 &= 32 - 12 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 จาก $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$

$$\text{ดังนั้น } f'(x) = \frac{d}{dx}[(x^2 + 1)(x^2 - 4)]$$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + 1) \frac{d}{dx}(x^2 - 4) + (x^2 - 4) \frac{d}{dx}(x^2 + 1) \\
&= (x^2 + 1)(2x - 0) + (x^2 - 4)(2x + 0) \\
&= 2x^3 + 2x + 2x^3 - 8x \\
&= 4x^3 - 6x \\
\text{จะได้ } f'(2) &= 4(2)^3 - 6(2) \\
&= 32 - 12 \\
&= 20
\end{aligned}$$

18. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \frac{x^5 - 3x^2 + 5x - 2}{x^2}$

วิธีทำ สามารถแสดงวิธีหาคำตอบได้ 2 กรณี นักเรียนเลือกทำวิธีใดก็ได้

วิธีที่ 1 จาก $y = \frac{x^5 - 3x^2 + 5x - 2}{x^2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^5}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{2}{x^2} \\
&= x^3 - 3 + 5x^{-1} - 2x^{-2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 3 + 5x^{-1} - 2x^{-2})$

$$\begin{aligned}
&= 3x^2 - 5x^{-2} + 4x^{-3} \\
&= 3x^2 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3}
\end{aligned}$$

วิธีที่ 2 จาก $y = \frac{x^5 - 3x^2 + 5x - 2}{x^2}$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \frac{d}{dx}(x^5 - 3x^2 + 5x - 2) - (x^5 - 3x^2 + 5x - 2) \frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2(5x^4 - 6x + 5) - (x^5 - 3x^2 + 5x - 2)(2x)}{x^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(5x^6 - 6x^3 + 5x^2) - (2x^6 - 6x^3 + 10x^2 - 4x)}{x^4} \\
&= \frac{5x^6 - 6x^3 + 5x^2 - 2x^6 + 6x^3 - 10x^2 + 4x}{x^4} \\
&= \frac{3x^6 - 5x^2 + 4x}{x^4} \\
&= \frac{3x^6}{x^4} - \frac{5x^2}{x^4} + \frac{4x}{x^4} \\
&= 3x^2 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3}
\end{aligned}$$

19. กำหนดให้ $y = \frac{x^2 + 2}{x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ สามารถแสดงวิธีหาคำตอบได้ 2 กรณี นักเรียนเลือกทำวิธีใดก็ได้

$$\begin{aligned}
\text{วิธีที่ 1} \quad \text{จาก } y &= \frac{x^2 + 2}{x} \\
&= \frac{x^2}{x} + \frac{2}{x} \\
&= x + 2x^{-1} \\
\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x + 2x^{-1}) \\
&= 1 - 2x^{-2} \\
&= 1 - \frac{2}{x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{วิธีที่ 2} \quad \text{จาก } y &= \frac{x^2 + 2}{x} \\
\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + 2}{x} \right) \\
&= \frac{x \frac{d}{dx}(x^2 + 2) - (x^2 + 2) \frac{d}{dx}(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x(2x) - (x^2 + 2)(1)}{x^2} \\
 &= \frac{2x^2 - x^2 - 2}{x^2} \\
 &= \frac{x^2 - 2}{x^2} \\
 &= \frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} \\
 &= 1 - \frac{2}{x^2}
 \end{aligned}$$

20. กำหนดให้ $f(x) = \frac{4x^5 + 2x^2}{3x^4 + 5}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{4x^5 + 2x^2}{3x^4 + 5}$

จะได้ $f'(x) = \frac{(3x^4 + 5) \frac{d}{dx}(4x^5 + 2x^2) - (4x^5 + 2x^2) \frac{d}{dx}(3x^4 + 5)}{(3x^4 + 5)^2}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(3x^4 + 5)(20x^4 + 4x) - (4x^5 + 2x^2)(12x^3 + 0)}{(3x^4 + 5)^2} \\
 &= \frac{(60x^8 + 100x^4 + 12x^5 + 20x) - (48x^8 + 24x^5)}{(3x^4 + 5)^2} \\
 &= \frac{12x^8 - 12x^5 + 100x^4 + 20x}{(3x^4 + 5)^2}
 \end{aligned}$$

เฉลยแบบฝึกทักษะ 6.2

.....ค..... 1. $f(x) = 5x^{18}$

ก. $f'(x) = -\frac{9}{x^4}$

.....ฉ..... 2. $f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{5}{4}}$

ข. $f'(x) = \frac{10x^4}{x^{10} - 10x^5 + 25}$

.....ก..... 3. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

ค. $f'(x) = 90x^{17}$

.....ณ..... 4. $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^{\frac{5}{3}} + 2x$

ง. $f'(x) = \frac{8}{3}x^3 + 5 + \frac{3}{x^4}$

.....จ..... 5. $f(x) = \frac{2}{3}x^4 + 5x - x^{-3}$

จ. $f'(x) = \frac{9x^6 - 24x^3 - 18x^2}{9x^6 - 12x^3 + 4}$

.....ญ..... 6. $f(x) = (x^4 + 3)(-4x^5 + 5x^4 + 5)$

ฉ. $f'(x) = \frac{15}{16}x^{\frac{1}{4}}$

.....ช..... 7. $f(x) = (5x^4 - 3x^2 - 1)(-5x^2 + 3)$

ช. $f'(x) = \frac{-5x^6 - 4x^3 - 30x^2}{2x^8 - 8x^4 + 8}$

.....ซ..... 8. $f(x) = \frac{2}{x^5 - 5}$

ซ. $f'(x) = -150x^5 + 120x^3 - 8x$

.....จ..... 9. $f(x) = \frac{3x^4 + 2}{3x^3 - 2}$

ณ. $f'(x) = -2x^3 + 5x^{\frac{2}{3}} + 2$

.....ช..... 10. $f(x) = \frac{3x^4 + 5x^3 - 5}{2x^4 - 4}$

ญ. $f'(x) = -36x^8 + 40x^7 - 60x^4 + 80x^3$