

คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของหน่วยการเรียนรู้เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ประกอบด้วยแบบฝึกทักษะทั้งหมด 10 เล่ม ดังนี้

- เล่ม 1 ลิมิตของฟังก์ชัน
- เล่ม 2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน
- เล่ม 3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
- เล่ม 4 อัตราการเปลี่ยนแปลง
- เล่ม 5 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
- เล่ม 6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร
- เล่ม 7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ
- เล่ม 8 ความชันของเส้นโค้ง
- เล่ม 9 อนุพันธ์อันดับสูง
- เล่ม 10 การประยุกต์ของอนุพันธ์

โดยในแบบฝึกทักษะแต่ละเล่ม ประกอบด้วยผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ครอบคลุมทั้งด้านความรู้ ด้านทักษะกระบวนการและด้านคุณลักษณะ ซึ่งกิจกรรมของแบบฝึกทักษะแต่ละเล่มเสร็จสมบูรณ์ในตัวเอง ผู้เรียนสามารถใช้ได้ด้วยตนเอง

สำหรับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่ม 4 อัตราการเปลี่ยนแปลง จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9-11 เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง มีจุดมุ่งหมายเพื่อให้นักเรียนสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ อีกทั้งยังเป็นแนวทางในการปฏิรูปกระบวนการจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ส่งเสริมผู้เรียนได้ฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์และแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง อันจะทำให้ผู้เรียนเกิดความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหามากยิ่งขึ้น เกิดความคงทนในการเรียนรู้และสามารถนำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ การค้นคว้าหาความรู้ของนักเรียนและเป็นประโยชน์ต่อผู้สนใจ เพื่อนครูและวงการศึกษาต่อไป

พนารัตน์ รอดภัย



สารบัญ

	หน้า □
คำนำ	ก
สารบัญ	ข
คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับครูผู้สอน	ค
คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน	ง
ผลการเรียนรู้	จ
จุดประสงค์การเรียนรู้	จ
สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	จ
ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน	ฉ
สาระสำคัญ	ช
แบบทดสอบก่อนเรียน	1
กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน	3
ยังจำได้ไหม	4
ใบความรู้ 4.1 อัตราการเปลี่ยนแปลง	5
แบบฝึกทักษะ 4.1	8
ใบความรู้ 4.2 อัตราการเปลี่ยนแปลง (ต่อ)	14
แบบฝึกทักษะ 4.2	17
แบบทดสอบหลังเรียน	22
กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน	25
แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน	26
แบบบันทึกความก้าวหน้าของแบบฝึกทักษะ	27
บรรณานุกรม	28
ภาคผนวก	30
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	31
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	32
เฉลยแบบฝึกทักษะ 4.1	33
เฉลยแบบฝึกทักษะ 4.2	39

คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับครูผู้สอน

1. ศึกษาแผนการจัดการเรียนรู้และการใช้แบบฝึกทักษะ
2. ศึกษาและทำความเข้าใจเนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้และการดำเนินการสอน เพื่อให้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็นไปตามลำดับขั้นตอน
3. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน
4. ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้
5. ให้คำแนะนำและความช่วยเหลือแก่นักเรียนเมื่อมีปัญหา ตามความเหมาะสมกับความสามารถและศักยภาพของนักเรียนที่แตกต่างกัน
6. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน
7. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ใช้เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน 3 ชั่วโมง



คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับผู้เรียน

1. ศึกษาการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
2. ศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้ เพื่อให้ทราบว่านักเรียนต้องรู้และปฏิบัติสิ่งใดบ้างหลังจากจบบทเรียนแล้ว
3. ทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อตรวจสอบความรู้เดิมในเรื่องที่เรียน จากนั้นตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน
4. ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้เข้าใจ แล้วทำแบบฝึกทักษะตามลำดับขั้นตอน
5. หากไม่เข้าใจหรือมีปัญหา นักเรียนสามารถปรึกษาและแลกเปลี่ยนองค์ความรู้
6. ทำแบบทดสอบหลังเรียนแล้วตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน แล้วเปรียบเทียบกับคะแนนทดสอบก่อนเรียน
7. หากยังมีข้อสงสัยและไม่เข้าใจให้กลับไปทบทวนบทเรียนจากแบบฝึกทักษะอีกครั้ง
8. นักเรียนควรซื่อสัตย์ต่อตนเอง โดยไม่เปิดดูเฉลยระหว่างศึกษาแบบฝึกทักษะ เพื่อให้นักเรียนจะได้พัฒนาการเรียนรู้ของตนเองอย่างเต็มความสามารถ



ผลการเรียนรู้

หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

สามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

ด้านทักษะกระบวนการ

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความซื่อสัตย์ สุจริต
2. มีวินัย
3. ใฝ่เรียนรู้
4. มุ่งมั่นในการทำงาน

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

1. ความสามารถในการสื่อสาร
2. ความสามารถในการคิด
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา



ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน



สาระสำคัญ

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนเป็น $x + h$ โดยที่ $h \neq 0$ ค่าของ y เปลี่ยนจาก $f(x)$ เป็น $f(x + h)$ แล้ว อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ x มีค่าใด ๆ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$



รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เล่ม 4 อัตราการเปลี่ยนแปลง

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกที่สุด

1. กำหนด $y = x^2 + 1$ ข้อใดคืออัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ขณะที่ x เปลี่ยนจาก 3 ไปเป็น 5

ก. 26

ข. 16

ค. 10

ง. 8

2. กำหนด $y = x^2 + 2x + 5$ ข้อใดคืออัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ขณะที่ x เปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น 5

ก. 26

ข. 16

ค. 10

ง. 8

3. กำหนด $y = \frac{4}{x^2}$ ข้อใดคืออัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ขณะที่ x เปลี่ยนจาก -2 ไปเป็น -1

ก. -5

ข. -3

ค. 3

ง. 5

4. กำหนด $y = \frac{x}{x-1}$ ข้อใดคืออัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ขณะที่ x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 4

ก. $-\frac{1}{3}$ ข. $-\frac{3}{2}$ ค. $-\frac{2}{3}$ ง. $-\frac{1}{2}$ 

- แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

ยังจำได้ไหม

สงสัยจัง ถ้ากำหนดฟังก์ชันมาให้ ถ้าค่า x เปลี่ยนไป ค่า y จะเปลี่ยนอย่างไรนะ



อ้อ ไม่ยากหรอกจ๊ะ เช่น ถ้าให้ $y = f(x) = x^2 + 1$

1. ถ้า $x = 1$ แล้ว y มีค่าเท่าไร (ตอบ.....)

2. ถ้า $x = 3$ แล้ว y มีค่าเท่าไร (ตอบ.....)

3. ถ้า $x = 5$ แล้ว y มีค่าเท่าไร (ตอบ.....)



ลองสังเกตตามนี้นะ

4. ถ้าค่าของ x เปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น 3 ค่าของ y เปลี่ยนไปอย่างไร

ตอบ.....

5. ถ้าค่าของ x เปลี่ยนจาก 3 ไปเป็น 5 ค่าของ y เปลี่ยนไปอย่างไร

ตอบ.....

คำตอบ 1. 2 2. 10 3. 26 4. ค่าของ y เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 10 5. ค่าของ y เปลี่ยนจาก 10 ไป

ใบความรู้ 4.1

อัตราการเปลี่ยนแปลง

บทนิยาม

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนเป็น $x + h$ โดยที่ $h \neq 0$

ค่าของ y เปลี่ยนจาก $f(x)$ เป็น $f(x + h)$ แล้ว อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x

ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x มีค่าใด ๆ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $y = f(x) = 2x^2 - 3$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 5

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ

$$\begin{aligned} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{2(x + h)^2 - 3 - (2x^2 - 3)}{h} \\ &= \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 3 - 2x^2 + 3}{h} \\ &= \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3 - 2x^2 + 3}{h} \\ &= 4x + 2h \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง $x = 2$ ถึง $x = 5$ คือ

$$\begin{aligned} \frac{f(2 + 3) - f(2)}{3} &= 4(2) + 2(3) \\ &= 14 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $y = f(x) = \frac{1}{x}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 2.5

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

หา ค.ร.น. ของ x และ $x+h$ ได้ $x(x+h)$

$$= \frac{\cancel{x} - \cancel{x} - h}{h[x(x+h)]}$$

$$= \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}[x(x+h)]}$$

$$= -\frac{1}{x(x+h)}$$

$$= -\frac{1}{x^2 + xh}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง $x = 2$ ถึง $x = 2.5$ คือ

$$\begin{aligned} \frac{f(2+0.5) - f(2)}{0.5} &= -\frac{1}{2^2 + 2(0.5)} \\ &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $y = f(x) = 3x^2 + 2$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x = 3$

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ x ใด ๆ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } f(x) &= 3x^2 + 2 \\
 f(x+h) &= 3(x+h)^2 + 2 \\
 &= 3(x^2 + 2xh + h^2) + 2 \\
 &= 3x^2 + 6xh + 3h^2 + 2 \\
 f(x+h) - f(x) &= (3x^2 + 6xh + 3h^2 + 2) - (3x^2 + 2) \\
 &= 3x^2 + 6xh + 3h^2 + 2 - 3x^2 - 2 \\
 &= 6xh + 3h^2 \\
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h) \\
 &= 6x
 \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x = 3$ คือ

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= 6(3) \\
 &= 18
 \end{aligned}$$



แบบฝึกทักษะที่ 4.1

คำชี้แจง

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้หรือไม่
(ข้อละ 1 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

1. กำหนด $y = f(x) = x^2 - 6x + 8$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น 1.5

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. กำหนด $y = f(x) = 2 - x^2$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น 2

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. กำหนด $y = f(x) = -\frac{3}{x}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 3 ไปเป็น 5

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. กำหนด $y = f(x) = 5 - 2x^2$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2.5 ไปเป็น 2

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. กำหนด $y = f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง

$x = 2$ ถึง $x = 4$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ต่อไปเป็นการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงนะครับ ถ้าเพื่อน ๆ จำได้
หรือเปล่าครับว่าแตกต่างจากการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยอย่างไร



อ้อ จำได้ซิ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x
ถึง $x + h$ คือ $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ ส่วนอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y

เทียบกับ x ขณะที่ x ใด ๆ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$



6. จากข้อ 1 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ $x = 1.5$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. จากข้อ 2 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ $x = 2$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. จากข้อ 3 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ $x = 5$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. กำหนดให้ $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ $x = 5$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. ให้ $f(x) = 3x^2 - 4x$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ $x = 4$

วิธีทำ

ต่อไปเราไปศึกษากันว่า สามารถนำความรู้เรื่องอัตราการเปลี่ยนแปลงไปประยุกต์ใช้
ได้อย่างไรบ้าง



ใบความรู้ 4.2

อัตราการเปลี่ยนแปลง (ต่อ)

การนำความรู้เรื่องอัตราการเปลี่ยนแปลงไปประยุกต์ใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4 ความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่ง เปลี่ยนจาก 11 เซนติเมตร เป็น 10 เซนติเมตร จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม เทียบกับความยาวของด้าน

วิธีทำ ให้ x แทนความยาวของด้าน
 y แทนพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

$$\text{จากสูตรการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จะได้ } y = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก x เซนติเมตร เป็น $x + h$ เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(x+h)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2}{h} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}[(x+h)^2 - x^2]}{h} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}[\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}]}{h} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(2xh + h^2)}{h} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(2x + h) \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก 11 เซนติเมตร เป็น 10 เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned}\frac{f[10 + (-1)] - f(11)}{(-1)} &= \frac{\sqrt{3}}{4} [2(11) + (-1)] \\ &= \frac{21\sqrt{3}}{4} \text{ ตารางเซนติเมตร/เซนติเมตร}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5

วงกลมวงหนึ่งมีรัศมียาว r เซนติเมตร จงหา

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลม เทียบกับความยาวรัศมี ในกรณีที่ $r = 6$ เซนติเมตร
2. อัตราการเปลี่ยนแปลงของความยาวเส้นรอบวง เทียบกับความยาวของรัศมี ในกรณีที่ $r = 6$ เซนติเมตร

วิธีทำ พื้นที่วงกลมที่มีรัศมียาว r เซนติเมตร คือ $f(r) = \pi r^2$

ความยาวของเส้นรอบวงที่มีรัศมียาว r เซนติเมตร คือ $f(r) = 2\pi r$

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลม เทียบกับความยาวรัศมี ในกรณีที่ r ใด ๆ คือ

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi(r+h)^2 - \pi r^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi(r^2 + 2rh + h^2) - \pi r^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi r^2 + 2rh\pi + \pi h^2 - \pi r^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2r\pi + \pi h) \\ &= 2r\pi\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลม เทียบกับความยาวรัศมี ในกรณีที่ $r = 6$ เซนติเมตร มีค่าเท่ากับ $2(6)\pi \approx 37.71$ ตารางเซนติเมตร

2. อัตราการเปลี่ยนแปลงของความยาวของเส้นรอบวง เทียบกับความยาวรัศมี ในกรณีที่ r ใด ๆ คือ

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\pi(r+h) - 2\pi r}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\pi r + 2\pi h - 2\pi r}{h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\pi h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 2\pi \\
 &= 2\pi
 \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของความยาวเส้นรอบวง เทียบกับความยาวของรัศมีในกรณีที่ $r = 6$ เซนติเมตร มีค่าเท่ากับ $2\pi \approx 6.29$ เซนติเมตร



แบบฝึกทักษะที่ 4.2

คำชี้แจง จงแสดงวิธีทำ (ข้อละ 2 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

1. กำหนดให้ y คือพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ x คือความยาวของด้าน จงหา
- ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อเทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก 10 เซนติเมตร เป็น 12 เซนติเมตร
- ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อเทียบกับความยาวของด้านขณะ ความยาวของด้านเป็น 12 เซนติเมตร

[illegible]

2. จากวงกลมรัศมียาว r เซนติเมตร จงหา

ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่วงกลมเมื่อเทียบกับความยาวของรัศมี เมื่อความยาวของรัศมีเปลี่ยนจาก r เซนติเมตร เป็น $r + h$ เซนติเมตร

ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลมเทียบกับความยาวของรัศมี ขณะรัศมียาว r เซนติเมตร

[illegible]

3. กำหนดให้ y แทนพื้นที่ผิวของแท่งไม้ทรงลูกบาศก์ และ x แทนความยาวของด้าน จงหา

ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่ผิวทั้งหมดเทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก 10 เซนติเมตร เป็น 11 เซนติเมตร

ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ผิวทั้งหมดเทียบกับความยาวของด้าน ขณะความยาวของด้านเป็น 11 เซนติเมตร

วิธีทำ

This image shows a single page of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, leaving small margins at the top and bottom. There is no handwriting or other markings on the paper.

4. กำหนดให้ y แทนปริมาตรของแท่งไม้ทรงลูกบาศก์ และ x แทนความยาวของด้าน จงหา

ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรเทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก x เซนติเมตร เป็น $x + h$ เซนติเมตร

ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรเทียบกับความยาวของด้าน ขณะความยาวของด้านเป็น 5 เซนติเมตร

วิธีทำ

[illegible]

5. ปริมาณของสาร N กรัม ในน้ำยา เปลี่ยนไปตามเวลา t ตามสมการ $N = \frac{8}{t+1}$

เมื่อ t มีหน่วยเป็นนาฬิกา จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ N เทียบกับ t ขณะ $t = 3$ นาฬิกา

วิธีทำ



รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เล่ม 4 อัตราการเปลี่ยนแปลง

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกต้องที่สุด

1. กำหนด $y = \frac{4}{x^2}$ ข้อใดคืออัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ขณะที่ x

เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น -1

- | | |
|-------|-------|
| ก. 5 | ข. 3 |
| ค. -3 | ง. -5 |

2. กำหนด $y = x^2 + 1$ ข้อใดคืออัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ขณะที่ x

เปลี่ยนจาก 3 ไปเป็น 5

- | | |
|-------|-------|
| ก. 8 | ข. 10 |
| ค. 16 | ง. 26 |

3. กำหนด $y = x^2 + 2x + 5$ ข้อใดคืออัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x

ขณะที่ x เปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น 5

- | | |
|-------|-------|
| ก. 8 | ข. 10 |
| ค. 16 | ง. 26 |

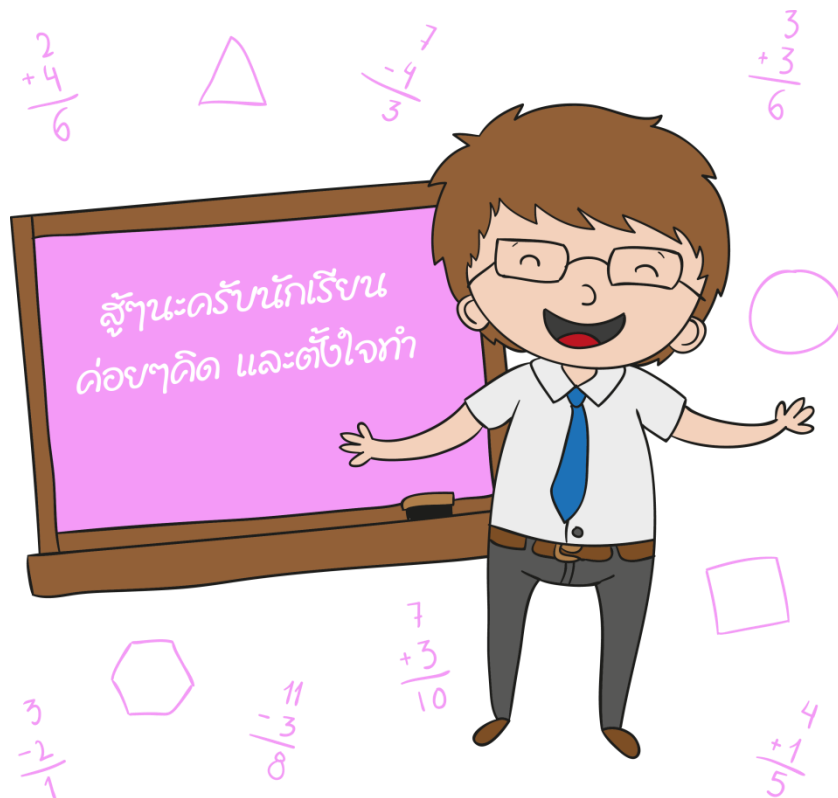
4. กำหนด $y = \frac{x}{x-1}$ ข้อใดคืออัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ขณะที่ x

เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 4

- | | |
|-------------------|-------------------|
| ก. $-\frac{1}{3}$ | ข. $-\frac{3}{2}$ |
| ค. $-\frac{2}{3}$ | ง. $-\frac{1}{2}$ |

- แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

10. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งมีความยาวด้านละ x เซนติเมตรข้อใดคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ที่เทียบกับความยาวของด้านในขณะที่ $x = 10$ เซนติเมตร
- 20 ตารางเซนติเมตร/เซนติเมตร
 - 30 ตารางเซนติเมตร/เซนติเมตร
 - 40 ตารางเซนติเมตร/เซนติเมตร
 - 50 ตารางเซนติเมตร/เซนติเมตร



กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
เล่ม 4 อัตราการเปลี่ยนแปลง

ชื่อ.....ชั้น..... เลขที่.....
โรงเรียนบ้านไร่วิทยา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	ความก้าวหน้า	คิดเป็นร้อยละ
การทดสอบก่อนเรียน	10			
การทดสอบหลังเรียน	10			



แบบบันทึกความก้าวหน้าของแบบฝึกทักษะ
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
เล่ม 4 อัตราการเปลี่ยนแปลง

ชื่อ.....ชั้น..... เลขที่.....
โรงเรียนบ้านไร่วิทยา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

แบบฝึกทักษะที่	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	คิดเป็นร้อยละ	ผ่านเกณฑ์*	ไม่ผ่านเกณฑ์**
4.1	10				
4.2	10				
รวมทั้งหมด	20				
เฉลี่ย					
คิดเป็นร้อยละ					

* ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
 ** ไม่ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนน้อยกว่าร้อยละ 80 ของคะแนนเต็ม





- กนกวลี อุษณกรกุล และรณชัย มาเจริญทรัพย์. (2548). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด. (2554). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- กมลเอก ไทยเจริญ. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.
- กานดา ลือสุทธิวิบูลย์ และยุพิน จิรสุขานนท์. (2548). **สรุปคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ม. 4 – 5 – 6 รายวิชาพื้นฐานและรายวิชาเพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์ Pure Pure ม.6 (2 ภาคเรียน) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ Entrance คณิตศาสตร์ 15 พ.ศ.** กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด.
- เชษฐ์ ชื่นสกุลดี. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ PAT 1 ความถนัดทางคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: ห้างหุ้นส่วนจำกัดรุ่งเรืองสาส์นการพิมพ์.
- ณรงค์ ปิ่นนิม และคณะ. (2537). **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์รวม ม.4-5-6**. กรุงเทพฯ: ภูมิบัณฑิตการพิมพ์ จำกัด.
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2**. กรุงเทพฯ: แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด.
- ประชา ศิวเวทกุล. (2555). **กฎแฉคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 รายวิชาเพิ่มเติม เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- เลิศ สิทธิโกศล. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์แผนใหม่ แคลคูลัส ม.ปลาย 4-5-6**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ แมสพับลิชชิง.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว. (2554). **คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สมัย เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.4-5-6 สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด. (ม.ป.ป.). **Mathematics Problems โจทย์คณิตศาสตร์ ม. 4-5-6**. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.
- สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพรรณ เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน + เพิ่มเติม เล่มที่ 6 ช่วงชั้นที่ 4 (มัธยมศึกษาปีที่ 4-6)**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาติบุตร. (2556). แคลคูลัส Calculus 1

ฉบับเสริมประสบการณ์. กรุงเทพฯ: บริษัทพิมพ์ดีการพิมพ์ จำกัด.

สุเทพ จันทรสมศักดิ์. (ม.ป.ป.). คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015.

กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ภูมิบัณฑิต.

อเนก หิรัญ. (2544). คณิตศาสตร์ ม.6 ค 015. กรุงเทพฯ: หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์ เซ็นเตอร์.

_____. (ม.ป.ป.). แบบฝึกหัดพื้นฐาน วิชาคณิตศาสตร์ ม.6 ค 015. กรุงเทพฯ:

หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

Finney ,Ross L. and other. (2007). Calculus Graphical, Numerical, Algebraic
Third Edition. Upper Saddle River. New Jersey: Prentice Hall.



ภาคผนวก

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อ	คำตอบ
1	ง
2	ง
3	ง
4	ก
5	ข
6	ค
7	ข
8	ข
9	ก
10	ก

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ	คำตอบ
1	ก
2	ก
3	ก
4	ก
5	ง
6	ข
7	ค
8	ข
9	ก
10	ก

เฉลยแบบฝึกทักษะ 4.1

1. กำหนด $y = f(x) = x^2 - 6x + 8$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น 1.5

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{[(x+h)^2 - 6(x+h) + 8] - (x^2 - 6x + 8)}{h} \\
 &= \frac{[x^2 + 2xh + h^2 - (6x + 6h) + 8] - x^2 + 6x - 8}{h} \\
 &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 6x - 6h + 8 - x^2 + 6x - 8}{h} \\
 &= \frac{2xh + h^2 - 6h}{h} \\
 &= 2x + h - 6
 \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง $x = 1$ ถึง $x = 1.5$ คือ

$$\begin{aligned}
 \frac{f(1 + 0.5) - f(1)}{0.5} &= 2(1) + 0.5 - 6 \\
 &= -3.5
 \end{aligned}$$

2. กำหนด $y = f(x) = 2 - x^2$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น 2

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{[2 - (x+h)^2] - (2 - x^2)}{h} \\
 &= \frac{[2 - (x^2 + 2xh + h^2)] - 2 + x^2}{h} \\
 &= \frac{2 - x^2 - 2xh - h^2 - 2 + x^2}{h}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{-2xh - h^2}{h}$$

$$= -2x - h$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง $x = 1$ ถึง $x = 2$ คือ

$$\frac{f(1+1) - f(1)}{1} = \frac{-2(1) - 1}{1}$$

$$= -3$$

3. กำหนด $y = f(x) = -\frac{3}{x}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 3 ไปเป็น 5

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[-\frac{3}{x+h} - \frac{3}{x} \right]$$

$$= \frac{1}{h} \left[\frac{-3x + 3(x+h)}{x(x+h)} \right]$$

$$= \frac{1}{h} \left[\frac{-3x + 3x + 3h}{x(x+h)} \right]$$

$$= \left[\frac{3}{x(x+h)} \right]$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง $x = 3$ ถึง $x = 5$ คือ

$$\frac{f(3+2) - f(3)}{2} = \left[\frac{3}{3(3+2)} \right]$$

$$= \frac{1}{5}$$

4. กำหนด $y = f(x) = 5 - 2x^2$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2.5 ไปเป็น 2

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{[5 - 2(x + h)^2] - (5 - 2x^2)}{h} \\
 &= \frac{5 - 2(x^2 + 2xh + h^2) - 5 + 2x^2}{h} \\
 &= \frac{5 - 2x^2 - 4xh - 2h^2 - 5 + 2x^2}{h} \\
 &= \frac{-4xh - 2h^2}{h} \\
 &= -4x - 2h
 \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง $x = 2.5$ ถึง

$x = 2$ คือ

$$\begin{aligned}
 \frac{f[2.5 + (-0.5)] - f(2.5)}{(-0.5)} &= -4(2.5) - 2(-0.5) \\
 &= -10 + 1 \\
 &= -9
 \end{aligned}$$

5. กำหนด $y = f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง $x = 2$ ถึง $x = 4$

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left[\sqrt{x+h} - \frac{1}{2} \right] - \left[\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right]}{h} \\
 &= \frac{1}{h} \cdot \left[\sqrt{x+h} - \frac{1}{2} - \sqrt{x} + \frac{1}{2} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง $x = 2$ ถึง $x = 4$ คือ

$$\begin{aligned}
 \frac{f(2+2) - f(2)}{2} &= \frac{\sqrt{2+2} - \sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{4} - \sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{2 - \sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

6. จากข้อ 1 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ $x = 1.5$

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 6) \\
 &= 2x - 6
 \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x เมื่อ $x = 1.5$ คือ $2(1.5) - 6 = -3$

7. จากข้อ 2 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ $x = 2$

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x - h}{h} \\ &= -2x \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x เมื่อ $x = 2$ คือ $-2(2) = -4$

8. จากข้อ 3 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ $x = 5$

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{x(x+h)} \\ &= \frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x เมื่อ $x = 5$ คือ $\frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$

9. กำหนดให้ $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ $x = 5$

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } f(x+h) &= (x+h)^3 - (x+h)^2 + 3 \\ &= (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - (x^2 + 2xh + h^2) + 3 \\ &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^2 - 2xh - h^2 + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } f(x+h) - f(x) &= (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^2 - 2xh - h^2 + 3) - (x^3 - x^2 + 1) \\ &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^2 - 2xh - h^2 + 3 - x^3 + x^2 - 1 \\ &= 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2xh - h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2xh - h^2}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 - 2x - h)}{h} \\
&= 3x^2 + 3xh + h^2 - 2x - h \\
\text{ดังนั้น } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 2x - h) \\
&= 3x^2 - 2x
\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x เมื่อ $x = 5$ คือ $3(5)^2 - 2(5) = 65$

10. ให้ $f(x) = 3x^2 - 4x$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ $x = 4$

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(x+h)^2 - 4(x+h)] - (3x^2 - 4x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(x^2 + 2xh + h^2) - 4x - 4h] - 3x^2 + 4x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 4x - 4h - 3x^2 + 4x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh - 4h}{h} \\
&= 6x - 4
\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x เมื่อ $x = 4$ คือ $6(4) - 4 = 20$

เฉลยแบบฝึกทักษะ 4.2

1. กำหนดให้ y คือพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ x คือความยาวของด้าน จงหา

ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อเทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก 10 เซนติเมตร เป็น 12 เซนติเมตร

ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อเทียบกับความยาวของด้าน ขณะความยาวของด้านเป็น 12 เซนติเมตร

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $y = x^2$

ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อเทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก x เซนติเมตรเป็น $x + h$ เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h} \\ &= 2x + h\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อเทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก 10 เซนติเมตร เป็น 12 เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(10+2) - f(10)}{2} &= 2(10) + 2 \\ &= 22 \text{ ตารางเซนติเมตร/เซนติเมตร}\end{aligned}$$

ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อเทียบกับความยาวของด้าน ขณะความยาวของด้านเป็น x เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2x\end{aligned}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อเทียบกับความยาวของด้าน ขณะความยาวของด้านเป็น 12 เซนติเมตร คือ $2(12) = 24$ ตารางเซนติเมตร/เซนติเมตร

2. จากวงกลมรัศมียาว r เซนติเมตร จงหา

ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่วงกลมเมื่อเทียบกับความยาวของรัศมี เมื่อความยาวของรัศมีเปลี่ยนจาก r เซนติเมตร เป็น $r + h$ เซนติเมตร

ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลมเทียบกับความยาวของรัศมี ขณะรัศมียาว r เซนติเมตร

วิธีทำ จากโจทย์ ให้ $f(r) = \pi r^2$

ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่วงกลมเมื่อเทียบกับความยาวของรัศมี เมื่อความยาวของรัศมีเปลี่ยนจาก r เป็น $r + h$ เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned} \frac{f(r+h) - f(r)}{h} &= \frac{\pi(r+h)^2 - \pi r^2}{h} \\ &= \frac{\pi(r^2 + 2rh + h^2) - \pi r^2}{h} \\ &= \frac{\pi r^2 + 2\pi rh + \pi h^2 - \pi r^2}{h} \\ &= 2\pi r + \pi h \\ &= \pi(2r + h) \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่วงกลมเมื่อเทียบกับความยาวของรัศมี เมื่อความยาวของรัศมีเปลี่ยนจาก r หน่วย เป็น $r + h$ เซนติเมตร คือ

$\pi(2r + h)$ ตารางเซนติเมตร/เซนติเมตร

ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลมเทียบกับความยาวของรัศมี ขณะรัศมียาว r เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} (2\pi r + \pi h) \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลมเทียบกับความยาวของรัศมี ขณะรัศมียาว r เซนติเมตร คือ $2\pi r$ ตารางเซนติเมตร/เซนติเมตร

3. กำหนดให้ y แทนพื้นที่ผิวของแท่งไม้ทรงลูกบาศก์ และ x แทนความยาวของด้าน จงหา

ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่ผิวทั้งหมดเทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก 10 เซนติเมตร เป็น 11 เซนติเมตร

ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ผิวทั้งหมดเทียบกับความยาวของด้าน ขณะความยาวของด้าน เป็น 11 เซนติเมตร

วิธีทำ จากโจทย์ $y = 6x^2$

ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่ผิวทั้งหมดเทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก x เป็น $x + h$ เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{6(x+h)^2 - 6x^2}{h} \\ &= \frac{6(x^2 + 2xh + h^2) - 6x^2}{h} \\ &= \frac{6x^2 + 12xh + 6h^2 - 6x^2}{h} \\ &= \frac{12xh + 6h^2}{h} \\ &= 12x + 6h\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่ผิวทั้งหมดเทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก 10 เซนติเมตร เป็น 11 เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(10+1) - f(11)}{1} &= 12(10) + 6(1) \\ &= 120 + 6 \\ &= 126 \text{ ตารางเซนติเมตร/เซนติเมตร}\end{aligned}$$

ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ผิวทั้งหมดเทียบกับความยาวของด้าน ขณะความยาวของด้าน เป็น x เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} (12x + 6h) \\ &= 12x\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ผิวทั้งหมดเทียบกับความยาวของด้าน ขณะความยาวของด้าน เป็น 11 เซนติเมตร คือ $12(11) = 132$ ตารางเซนติเมตร/เซนติเมตร

4. กำหนดให้ y แทนปริมาตรของแท่งไม้ทรงลูกบาศก์ และ x แทนความยาวของด้าน จงหา
- ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรเทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้าน เปลี่ยนจาก x เซนติเมตร เป็น $x + h$ เซนติเมตร
- ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรเทียบกับความยาวของด้าน ขณะความยาวของด้าน เป็น 5 เซนติเมตร

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $y = x^3$

- ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรเทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้าน เปลี่ยนจาก x เซนติเมตร เป็น $x + h$ เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= 3x^2 + 3xh + h^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรเทียบกับความยาวของด้าน

เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก x เซนติเมตร เป็น $x + h$ เซนติเมตร คือ $3x^2 + 3xh + h^2$ ลูกบาศก์เซนติเมตร/เซนติเมตร

- ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรเทียบกับความยาวของด้าน ขณะความยาวของด้าน เป็น 5 เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรเทียบกับความยาวของด้าน ขณะความยาวของด้าน เป็น 5 เซนติเมตร คือ $3(5^2) = 75$ ลูกบาศก์เซนติเมตร/เซนติเมตร

5. ปริมาณของสาร N กรัม ในน้ำยา เปลี่ยนไปตามเวลา t ตามสมการ $N = \frac{8}{t+1}$ เมื่อ t มีหน่วยเป็นนาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ N เทียบกับ t ขณะ $t = 3$ นาที

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad N &= f(t) = \frac{8}{t+1} \\
 f(t+h) &= \frac{8}{(t+h)+1} \\
 f(t+h) - f(t) &= \frac{8}{(t+h)+1} - \frac{8}{t+1} \\
 &= \frac{8(t+1) - 8(t+h+1)}{(t+1)(t+h+1)} \\
 &= \frac{-8h}{(t+1)(t+h+1)} \\
 \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \frac{-8}{(t+1)(t+h+1)} \\
 \text{จะได้ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ } N \text{ เทียบกับ } t \text{ ขณะ } t \text{ ใดๆ คือ} \\
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8}{(t+1)(t+h+1)} \\
 &= \frac{-8}{(t+1)^2}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ N เทียบกับ t ขณะ $t = 3$ เท่ากับ

$$\frac{-8}{(3+1)^2} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \text{ กรัม/นาที}$$