



## คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของหน่วยการเรียนรู้เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ประกอบด้วยแบบฝึกทักษะทั้งหมด 10 เล่ม ดังนี้

- เล่ม 1 ลิมิตของฟังก์ชัน
- เล่ม 2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน
- เล่ม 3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
- เล่ม 4 อัตราการเปลี่ยนแปลง
- เล่ม 5 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
- เล่ม 6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร
- เล่ม 7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ
- เล่ม 8 ความชันของเส้นโค้ง
- เล่ม 9 อนุพันธ์อันดับสูง
- เล่ม 10 การประยุกต์ของอนุพันธ์

โดยในแบบฝึกทักษะแต่ละเล่ม ประกอบด้วยผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ครอบคลุมทั้งด้านความรู้ ด้านทักษะกระบวนการและด้านคุณลักษณะ ซึ่งกิจกรรมของแบบฝึกทักษะแต่ละเล่มเสร็จสมบูรณ์ในตัวเอง ผู้เรียนสามารถใช้ได้ด้วยตนเอง

สำหรับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่ม 3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6-8 เรื่อง ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน มีจุดมุ่งหมายเพื่อให้ นักเรียนสามารถบอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ อีกทั้งยังเป็นแนวทางในการปฏิรูปกระบวนการจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ส่งเสริมผู้เรียนได้ฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์และแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง อันจะทำให้ผู้เรียนเกิดความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหามากยิ่งขึ้น เกิดความคงทนในการเรียนรู้และสามารถนำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ การค้นคว้าหาความรู้ของนักเรียนและเป็นประโยชน์ต่อผู้สนใจ เพื่อนครูและวงการศึกษต่อไป

พนารัตน์ รอดภัย



## สารบัญ

|                                                       | หน้า |
|-------------------------------------------------------|------|
| คำนำ                                                  | ก    |
| สารบัญ                                                | ข    |
| คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับครูผู้สอน   | ค    |
| คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน    | ง    |
| ผลการเรียนรู้                                         | จ    |
| จุดประสงค์การเรียนรู้                                 | จ    |
| สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน                               | จ    |
| ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน | ฉ    |
| สาระสำคัญ                                             | ช    |
| แบบทดสอบก่อนเรียน                                     | 1    |
| กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน                          | 4    |
| ยังจำได้ไหม                                           | 5    |
| ใบความรู้ 3.1 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน                | 6    |
| แบบฝึกทักษะ 3.1                                       | 12   |
| ใบความรู้ 3.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (ต่อ)          | 22   |
| แบบฝึกทักษะ 3.2                                       | 24   |
| ใบความรู้ที่ 3.3 ความต่อเนื่องบนช่วงของฟังก์ชัน       | 29   |
| แบบฝึกทักษะที่ 3.3                                    | 33   |
| แบบทดสอบหลังเรียน                                     | 38   |
| กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน                          | 41   |
| แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน □         | 42   |
| แบบบันทึกความก้าวหน้าของแบบฝึกทักษะ                   | 43   |
| บรรณานุกรม                                            | 44   |
| ภาคผนวก                                               | 46   |
| เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน                                 | 47   |
| เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน                                 | 48   |
| เฉลยแบบฝึกทักษะ 3.1                                   | 49   |
| เฉลยแบบฝึกทักษะ 3.2                                   | 57   |
| เฉลยแบบฝึกทักษะ 3.3                                   | 61   |

## คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับครูผู้สอน

1. ศึกษาแผนการจัดการเรียนรู้และการใช้แบบฝึกทักษะ
2. ศึกษาและทำความเข้าใจเนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้และการดำเนินการสอน เพื่อให้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็นไปตามลำดับขั้นตอน
3. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน
4. ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้
5. ให้คำแนะนำและความช่วยเหลือแก่นักเรียนเมื่อมีปัญหา ตามความเหมาะสมกับความสามารถและศักยภาพของนักเรียนที่แตกต่างกัน
6. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน
7. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ใช้เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน 3 ชั่วโมง



## คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับผู้เรียน

1. ศึกษาการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
2. ศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้ เพื่อให้ทราบว่านักเรียนต้องรู้และปฏิบัติสิ่งใดบ้างหลังจากจบบทเรียนแล้ว
3. ทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อตรวจสอบความรู้เดิมในเรื่องที่เรียน จากนั้นตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน
4. ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้เข้าใจ แล้วทำแบบฝึกทักษะตามลำดับขั้นตอน
5. หากไม่เข้าใจหรือมีปัญหา นักเรียนสามารถปรึกษาและแลกเปลี่ยนองค์ความรู้
6. ทำแบบทดสอบหลังเรียนแล้วตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน แล้วเปรียบเทียบกับคะแนนทดสอบก่อนเรียน
7. หากยังมีข้อสงสัยและไม่เข้าใจให้กลับไปทบทวนบทเรียนจากแบบฝึกทักษะอีกครั้ง
8. นักเรียนควรซื่อสัตย์ต่อตนเอง โดยไม่เปิดดูเฉลยระหว่างศึกษาแบบฝึกทักษะ เพื่อนักเรียนจะได้พัฒนาการเรียนรู้ของตนเองอย่างเต็มความสามารถ



## ผลการเรียนรู้

บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่

## จุดประสงค์การเรียนรู้

### ด้านความรู้

1. บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = a$  หรือไม่
2. เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อเนื่องให้ สามารถหาค่าของฟังก์ชัน ณ จุดที่กำหนดให้ได้
3. บอกได้ว่าฟังก์ชันใด ๆ ต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้หรือไม่

### ด้านทักษะกระบวนการ

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความซื่อสัตย์ สุจริต
2. มีวินัย
3. ใฝ่เรียนรู้
4. มุ่งมั่นในการทำงาน

## สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

1. ความสามารถในการสื่อสาร
2. ความสามารถในการคิด
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา



## ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน



## สาระสำคัญ

ถ้า  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  และกราฟของฟังก์ชันไม่ขาดตอนที่  $x = a$

ในลักษณะเช่นนี้เรียกฟังก์ชัน  $f$  ว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = a$

ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วงเปิด  $(a, b)$  และ  $c \in (a, b)$  จะกล่าวว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = c$  ก็ต่อเมื่อ

1.  $f(c)$  หาค่าได้

2.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  หาค่าได้

และ 3.  $f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$



## แบบทดสอบก่อนเรียน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เล่ม 3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

\*\*\*\*\*

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกต้องที่สุด

\*\*\*\*\*

1. ถ้าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = c$  แล้ว ข้อใดถูกต้อง

1.  $f(c)$  หาค่าได้

2.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  หาค่าได้

3.  $f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$

ก. ข้อ 1 และ ข้อ 2 ถูก

ข. ข้อ 1 และข้อ 3 ถูก

ค. ข้อ 2 และข้อ 3 ถูก

ง. ข้อ 1 ข้อ 2 และข้อ 3 ถูก

2. ถ้า  $f(x) = 3x - 4$  ข้อใดถูกต้อง

ก.  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 2$  แต่ไม่ต่อเนื่องที่  $x = -2$

ข.  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = -2$  แต่ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 2$

ค.  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 2$  และ  $x = -2$

ง.  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 2$  และ  $x = -2$

3. ถ้า  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ 4 & ; x = 1 \end{cases}$  ข้อความใดกล่าวถูกต้อง

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  หาค่าได้

2.  $f(1)$  หาค่าได้

3.  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 1$

ก. ข้อ 1 และ ข้อ 2 ถูก

ข. ข้อ 1 และข้อ 3 ถูก

ค. ข้อ 2 และข้อ 3 ถูก

ง. ข้อ 1 ข้อ 2 และข้อ 3 ถูก



4.  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x}$  ต่อเนื่องที่จุดใด

ก.  $x = -1$

ค.  $x = 1$

ข.  $x = 0$

ง. ถูกทั้งข้อ ก และข้อ ข

5.  $f(x) = \frac{-x^2}{2x+4}$  ไม่ต่อเนื่องที่จุดใด

ก.  $x = -2$

ค.  $x = 0$

ข.  $x = -1$

ง.  $x = 2$

6. ถ้า  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{2x} & ; x \neq 0 \\ k & ; x = 0 \end{cases}$

ค่า  $k$  ที่ทำให้  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $(-\infty, \infty)$  คือข้อใด

ก.  $-\frac{1}{4}$

ค.  $\frac{1}{4}$

ข.  $-\frac{1}{2}$

ง.  $\frac{1}{2}$

7. ถ้า  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3x+1} & ; 0 < x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \\ \frac{2-\sqrt{5-x}}{x-1} & ; x > 1 \end{cases}$  ข้อใดถูกต้อง

ก.  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 1$  แต่ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 3$

ข.  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 1$  และ  $x = 3$

ค.  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 1$  แต่ต่อเนื่องที่  $x = 3$

ง.  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 1$  และ  $x = 3$



## กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน

| ข้อ | ก | ข | ค | ง |
|-----|---|---|---|---|
| 1   |   |   |   |   |
| 2   |   |   |   |   |
| 3   |   |   |   |   |
| 4   |   |   |   |   |
| 5   |   |   |   |   |
| 6   |   |   |   |   |
| 7   |   |   |   |   |
| 8   |   |   |   |   |
| 9   |   |   |   |   |
| 10  |   |   |   |   |

# ยังจำได้ไหม

คำตอบข้อหนึ่ง -1

เราบทวนการหาขีดจำกัดของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎีบทกันดีกว่า

ได้สิ ตั้งคำถามมาเลย

ข้อหนึ่ง  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x - 5)$  มีค่าเท่าไร

ข้อสอง  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  มีค่าเท่าไร

ข้อหนึ่ง.....

.....

.....

.....

ข้อสอง.....

.....

.....

.....

.....

คำตอบข้อสอง 2

### ใบความรู้ 3.1

#### ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

**บทนิยาม** ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วงเปิด  $(a, b)$  และ  $c \in (a, b)$   
จะกล่าวว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = c$  ก็ต่อเมื่อ

1.  $f(c)$  หาค่าได้
2.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  หาค่าได้
- และ 3.  $f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$

**หมายเหตุ** จากบทนิยามข้างต้น ถ้าฟังก์ชัน  $f$  ขาดสมบัติข้อใดข้อหนึ่งแล้ว ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่  $x = c$

**ตัวอย่างที่ 1** จงพิจารณาว่า  $f(x) = x^2 + 1$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 2$  หรือไม่

วิธีทำ จาก  $f(x) = x^2 + 1$

จะได้  $f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$  (สมบัติข้อ 1  $f(x)$  หาค่าได้)

และ  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$   
 $= 2^2 + 1$   
 $= 5$  (สมบัติข้อ 2  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  หาค่าได้)

นั่นคือ  $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  (สมบัติข้อ 3  $f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ )

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 2$

การพิจารณาว่าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $c$  หรือไม่ จะต้องตรวจสอบว่าฟังก์ชัน  $f$  มีสมบัติครบตามเงื่อนไขทั้งสามข้อหรือไม่นั่นเอง

**ตัวอย่างที่ 2** ให้  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = -2$  หรือไม่

วิธีทำ จาก  $f(x) = \frac{1}{x+2}$

จะได้  $f(-2) = \frac{1}{(-2)+2}$

$$= \frac{1}{(-2)+2}$$

$$= \frac{1}{0}$$

นั่นคือ  $f(-2)$  หาค่าไม่ได้

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = -2$

**ตัวอย่างที่ 3** จงพิจารณาว่า  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = -1$  หรือไม่

วิธีทำ จาก  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

จะได้  $f(-1) = \frac{1}{(-1)^2+1}$

$$= \frac{1}{2}$$

(สมบัติข้อ 1  $f(x)$  หาค่าได้)

และ  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2+1}$

$$= \frac{1}{2}$$

(สมบัติข้อ 2  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  หาค่าได้)

นั่นคือ  $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  (สมบัติข้อ 3  $f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ )

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = -1$

## ตัวอย่างที่ 4

$$\text{กำหนดให้ } f(x) = \begin{cases} x & ; x < -2 \\ 2x & ; x \geq -2 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = -2$  หรือไม่

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = \begin{cases} x & ; x < -2 \\ 2x & ; x \geq -2 \end{cases}$$

เนื่องจาก  $x = -2$  จึงพิจารณา  $f(x) = 2x ; x \geq -2$

$$\text{จะได้ } f(-2) = 2(-2) = -4 \quad (\text{สมบัติข้อ 1 } f(x) \text{ หาค่าได้})$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} x = -2$$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} 2x = -4$$

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} 2x$$

นั่นคือ  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$  หาค่าไม่ได้

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = -2$

## ตัวอย่างที่ 5

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} & ; x \neq 3 \\ 5 & ; x = 3 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 3$  หรือไม่

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} & ; x \neq 3 \\ 5 & ; x = 3 \end{cases}$$

เนื่องจาก  $x = 3$  จึงพิจารณา  $f(x) = 5 ; x = 3$

$$\text{จะได้ } f(3) = 5 \quad (\text{สมบัติข้อ 1 } f(x) \text{ หาค่าได้})$$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+2) \\
 &= 5 \quad \text{(สมบัติข้อ 2 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ หาค่าได้)} \\
 \text{จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= f(3) \quad \text{(สมบัติข้อ 3 } f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{)}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 3$

ตัวอย่างที่ 6

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{|x-2|} & ; x \neq 2 \\ 0 & ; x = 2 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 2$  หรือไม่

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{|x-2|} & ; x \neq 2 \\ 0 & ; x = 2 \end{cases}$$

เนื่องจาก  $x = 2$  จึงพิจารณา  $f(x) = 0 ; x = 2$

$$\text{จะได้ } f(2) = 0 \quad \text{(สมบัติข้อ 1 } f(x) \text{ หาค่าได้)}$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{-(x-2)} = -1 \quad \text{-----(1)}$$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1 \quad \text{-----(2)}$$

$$\text{จาก (1) และ (2) จะเห็นว่า } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

นั่นคือ  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  หาค่าไม่ได้

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 2$



## ตัวอย่างที่ 7

$$\text{กำหนดให้ } f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; \quad x < 3 \\ 3 & ; \quad 3 \leq x < 5 \\ x - 2 & ; \quad x \geq 5 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 3$  และ  $x = 5$  หรือไม่

## วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; \quad x < 3 \\ 3 & ; \quad 3 \leq x < 5 \\ x - 2 & ; \quad x \geq 5 \end{cases}$$

พิจารณาที่  $x = 3$ 

เนื่องจาก  $x = 3$  จึงพิจารณา  $f(x) = 3$  ;  $x = 3$

จะได้  $f(3) = 3$  (สมบัติข้อ 1  $f(x)$  หาค่าได้)

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x + 1) = 7 \quad \text{-----(1)}$$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 \quad \text{-----(2)}$$

จาก (1) และ (2) จะเห็นว่า  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

นั่นคือ  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  หาค่าไม่ได้

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 3$

พิจารณาที่  $x = 5$ 

เนื่องจาก  $x = 5$  จึงพิจารณา  $f(x) = x - 2$  ;  $x = 5$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } f(5) &= 5 - 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

(สมบัติข้อ 1  $f(x)$  หาค่าได้)

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 3$$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (x - 2) = 3$$

$$\text{จะเห็นว่า } \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 3$$

$$\text{นั่นคือ } \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 3$$

(สมบัติข้อ 2  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  หาค่าได้)

$$\text{เนื่องจาก } f(5) = \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 5$

(สมบัติข้อ 3  $f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ )

สรุปได้ว่า ฟังก์ชัน  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 3$  แต่ต่อเนื่องที่  $x = 5$

**ทฤษฎีบท 1** ถ้า  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = a$  แล้ว ได้ว่า

1.  $f + g$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = a$
2.  $f - g$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = a$
3.  $f \cdot g$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = a$
4.  $\frac{f}{g}$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = a$

เราทราบมาแล้วว่า ถ้า  $p(x)$  เป็นฟังก์ชันพหุนามแล้วสำหรับจำนวนจริง  $a$  ใด ๆ จะได้ว่า  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p(a)$  ดังนั้นจะได้ทฤษฎีบทดังนี้

**ทฤษฎีบท 2** สำหรับจำนวนจริง  $a$  ใด ๆ

ฟังก์ชันพหุนาม  $p(x)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = a$

**ทฤษฎีบท 3** ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันตรรกยะ โดยที่  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

เมื่อ  $p(x)$  และ  $q(x)$  เป็นฟังก์ชันพหุนาม แล้ว  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = a$

เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง  $q(a) \neq 0$

**ตัวอย่างที่ 8** กำหนดให้  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$   
 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 0$  หรือไม่

**วิธีทำ** จาก  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$   
 ให้  $p(x) = x^2 - 9$  และ  $q(x) = x^2 - 5x + 6$   
 เนื่องจาก  $p$  และ  $q$  เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ  $q(0) = 6 \neq 0$   
 จากทฤษฎีบท 3 ดังนั้น  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 0$

### แบบฝึกทักษะ 3.1

**คำชี้แจง** จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนดให้หรือไม่  
(ข้อละ 1 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

1.  $f(x) = x + 5$  ; ที่  $x = 5$

[illegible]

$$2. f(x) = \frac{1}{x+2} \quad ; \quad \text{ที่ } x = 5$$

วิธีทำ .....

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; \quad x \neq 2 \\ 4 & ; \quad x = 2 \end{cases}$$

วิธีทำ .....

[illegible]

$$4. f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} \quad ; \quad \text{ห้ } x = 1$$

วิธีทำ .....

5.  $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$  ;      ที่  $x = 3$

[illegible]

$$6. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 36}{x - 6} & x \neq 6 \\ 4 & x = 6 \end{cases}$$

วิธีทำ



$$7. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & ; \quad x \neq 1 \\ 2 & ; \quad x = 1 \end{cases} \quad \text{if } x = 1$$

[illegible]

8.  $f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \leq 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$   $\forall x = 2$

วิธีทำ

$$9. \quad f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & ; \quad x = 2 \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; \quad x \neq 2 \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R}$$

[illegible]

10.  $f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} & ; \quad 1 < x \leq 2 \\ 3-x & ; \quad x > 2 \end{cases}$       ที่  $x = 1$  และ  $x = 2$

วิธีทำ .....

## ใบความรู้ 3.2

### ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (ต่อ)

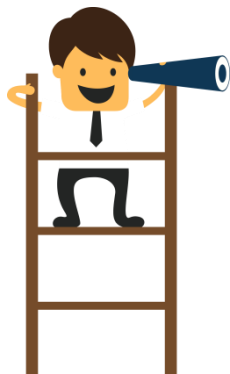
ต่อไปเป็นตัวอย่าง กรณีที่โจทย์กำหนดเงื่อนไขของความต่อเนื่อง

**ตัวอย่างที่ 9** กำหนดให้  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$  ถ้าฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 1$  แล้ว  $f(1)$  เป็นมีค่าเท่ากับเท่าไร

**วิธีทำ** เนื่องจาก ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 1$

$$\text{แสดงว่า } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\text{พิจารณา } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)}{(x^2 + x + 1)}$$

$$= \frac{2}{3}$$

ดังนั้น  $f(1)$  มีค่าเท่ากับ  $\frac{2}{3}$  จึงจะทำให้ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 1$

ตัวอย่างที่ 10

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & ; \quad x \neq 1 \\ k & ; \quad x = 1 \text{ และ } k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ฟังก์ชัน  $f$  จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 1$  ก็ต่อเมื่อ  $k$  มีค่าเท่าไรวิธีทำ เนื่องจาก ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 1$ 

$$\text{และ} \quad f(1) = k$$

$$\text{แสดงว่า} \quad k = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

วิธีที่ 1 พิจารณา  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1)$$

$$= 2$$

ดังนั้น  $k = 2$  จึงจะทำให้ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 1$ วิธีที่ 2 พิจารณา  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1)$$

$$= 2$$

ดังนั้น  $k = 2$  จึงจะทำให้ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 1$ 

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เล่ม 3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

### แบบฝึกทักษะ 3.2

**คำชี้แจง** จงแสดงวิธีทำ (ข้อละ 2 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

1. กำหนด  $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$  ถ้าฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 1$  แล้ว  $f(1)$  มีค่าเท่าไร

[illegible]

วิธีทำ .....



3. กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ a & ; \quad x = 0 \text{ และ } a \in \mathbb{R} \end{cases}$

จงพิจารณาว่า ถ้าฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 0$  แล้ว  $a$  มีค่าเท่าไร

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

---

.....

.....

.....

.....

4. กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 1} & ; \quad x \neq 5 \\ m^2 + 1 & ; \quad x = 5 \text{ และ } m \in \mathbb{R} \end{cases}$

จงพิจารณาว่า ถ้าฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 5$  แล้ว  $m$  มีค่าเท่าไร

วิธีทำ .....

5. กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} ax & ; \quad x \leq 1 \\ x - b & ; \quad x > 1 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า ถ้าฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 1$  แล้ว  $a + b$  มีค่าเท่าไร

วิธีทำ

## ใบความรู้ 3.3

### ความต่อเนื่องบนช่วงของฟังก์ชัน

**ความต่อเนื่องบนช่วง** ต้องพิจารณาตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1. ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $(a, b)$  ก็ต่อเมื่อ  $f$  ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง  $(a, b)$
2. ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$  ก็ต่อเมื่อ
  - 2.1 ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง  $(a, b)$  และ
  - 2.2  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  และ  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$
3. ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $(a, b]$  ก็ต่อเมื่อ
  - 3.1 ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง  $(a, b)$  และ
  - 3.2  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$
4. ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b)$  ก็ต่อเมื่อ
  - 4.1 ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง  $(a, b)$  และ
  - 4.2  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

เรามาได้กษัตริย์  
การหาความต่อเนื่องบนช่วงกันนะ:



**ตัวอย่างที่ 11** กำหนด  $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$   
จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องบนช่วง  $(-4, 4)$  หรือไม่

**วิธีทำ** ให้  $c$  เป็นจุดใด ๆ บนช่วง  $(-4, 4)$

$$\text{จาก} \quad f(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

$$\text{จะได้} \quad f(c) = \sqrt{16 - c^2}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{16 - x^2} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow c} (16 - x^2)} \\ &= \sqrt{16 - c^2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

สรุปได้ว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $(-4, 4)$

**ตัวอย่างที่ 12** กำหนด  $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$   
จงแสดงว่าฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[-3, 3]$

**วิธีทำ** ให้  $c$  เป็นจุดใด ๆ บนช่วง  $(-3, 3)$

← เงื่อนไขข้อ 2.1

$$\text{จาก} \quad f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

$$\text{จะได้} \quad f(c) = \sqrt{9 - c^2}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{9 - x^2} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow c} (9 - x^2)} \\ &= \sqrt{9 - c^2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

สรุปได้ว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $(-3, 3)$

ต่อไปจะแสดงว่า  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = f(-3)$  และ  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$  ← เงื่อนไขข้อ 2.2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^+} \sqrt{9 - x^2} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -3^+} (9 - x^2)} = 0 = f(-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9 - x^2} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3^-} (9 - x^2)} = 0 = f(3) \end{aligned}$$

ดังนั้นฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[-3, 3]$

**ตัวอย่างที่ 13** กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} 2x & ; 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & ; 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$   
 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องบนช่วง  $[0, 2]$  หรือไม่

### วิธีทำ

**พิจารณาบนช่วง  $(0, 1)$**

ให้  $c$  เป็นจุดใด ๆ บนช่วง  $(0, 1)$

$$\text{จาก } f(x) = 2x$$

$$\text{จะได้ } f(c) = 2c$$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} 2x = 2c$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

สรุปได้ว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $(0, 1)$

**พิจารณาที่  $x = 1$**

$$\text{จาก } f(x) = 2 - x$$

$$\text{จะได้ } f(1) = 2 - 1 = 1$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2$$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 1$$

จะเห็นว่า  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

ดังนั้น  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  หาค่าไม่ได้

นั่นคือ ฟังก์ชัน  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 1$

และ  $1 \in [0, 2]$

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ไม่ต่อเนื่องบนช่วง  $[0, 2]$

ไปทำแบบฝึกหัด  
เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ  
กันนะครับ



### แบบฝึกทักษะ 3.3

**คำชี้แจง** จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้หรือไม่  
(ข้อละ 2 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

1. กำหนด  $f(x) = x^2 + 2x$  จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องบนช่วง  $(3, 5)$  หรือไม่

[illegible]



2. กำหนด  $f(x) = 2x + 3$  จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องบนช่วง  $(-1, 1)$  หรือไม่

วิธีทำ .....

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

4. กำหนด  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 1}$  จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องบนช่วง  $(1, 2)$  หรือไม่

วิธีทำ .....

5. กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & ; x < -1 \\ x + 6 & ; -1 \leq x < 3 \\ 3x - 1 & ; x \geq 3 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า  $f$  ต่อเนื่องบนช่วง  $[-2, 5)$  หรือไม่

วิธีทำ .....

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.



รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เล่ม 3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

\*\*\*\*\*

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกที่สุด

\*\*\*\*\*

1. ถ้า  $f(x) = 3x - 4$  ข้อใดถูกต้องก.  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 2$  แต่ไม่ต่อเนื่องที่  $x = -2$ ข.  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 2$  และ  $x = -2$ ค.  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 2$  และ  $x = -2$ ง.  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = -2$  แต่ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 2$ 2.  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x}$  ต่อเนื่องที่จุดใดก.  $x = -1$ ข.  $x = 0$ ค.  $x = 1$ 

ง. ถูกทั้งข้อ ก และข้อ ข

3.  $f(x) = \frac{-x^2}{2x+4}$  ไม่ต่อเนื่องที่จุดใดก.  $x = 2$ ข.  $x = 0$ ค.  $x = -1$ ง.  $x = -2$ 4. ถ้าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = c$  แล้ว ข้อใดถูกต้อง1.  $f(c)$  หาค่าได้2.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  หาค่าได้3.  $f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 

ก. ข้อ 1 และ ข้อ 2 ถูก

ข. ข้อ 1 และข้อ 3 ถูก

ค. ข้อ 2 และข้อ 3 ถูก

ง. ข้อ 1 ข้อ 2 และข้อ 3 ถูก

5. ถ้า  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ 4 & ; x = 1 \end{cases}$  ข้อความใดกล่าวถูกต้อง

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  หาค่าได้
2.  $f(1)$  หาค่าได้
3.  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 1$

- ก. ข้อ 1 และข้อ 2 ถูก                                  ข. ข้อ 1 และข้อ 3 ถูก  
ค. ข้อ 2 และข้อ 3 ถูก                                  ง. ข้อ 1 ข้อ 2 และข้อ 3 ถูก

6. กำหนดให้  $f(x) = \sqrt{x-3}$  แล้ว ฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องบนช่วงใด

- ก.  $[3, \infty)$   
ข.  $(-\infty, 3]$   
ค.  $(3, \infty)$   
ง.  $(0, 2]$

7. กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \neq 5 \\ 3 & ; x = 5 \end{cases}$  แล้ว ฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องบนช่วงใด

- ဂ.  $(0, 5]$   
 င.  $(-\infty, 5) \cup (5, \infty)$   
 က.  $(-\infty, 5] \cup [5, \infty)$   
 ခ.  $[5, \infty)$

8. ถ้า  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{2x} & ; \quad x \neq 0 \\ k & ; \quad x = 0 \end{cases}$

จงหาค่า  $k$  ที่ทำให้  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $(-\infty, \infty)$

- $$\begin{array}{ll} \text{ဂါ.} & -\frac{1}{4} \\ \text{ဂဃ.} & -\frac{1}{2} \\ \text{ဂဂ.} & \frac{1}{4} \\ \text{ဂဇ.} & \frac{1}{2} \end{array}$$

9. ถ้า  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3x+1} & ; 0 < x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \\ \frac{2 - \sqrt{5-x}}{x-1} & ; x > 1 \end{cases}$  ข้อใดถูกต้อง

- ก.  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 1$  และ  $x = 3$   
 ข.  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 1$  และ  $x = 3$   
 ค.  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 1$  แต่ต่อเนื่องที่  $x = 3$   
 ง.  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 1$  แต่ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 3$

10. กำหนดให้  $f(x) = \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$  เมื่อ  $x \neq 8$  ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 8$  แล้ว

f(8) มีค่าตรงกับข้อใด

- ก. 8                                          ข. 10  
ค. 12                                         ง. 20



## กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน

| ข้อ | ก | ข | ค | ง |
|-----|---|---|---|---|
| 1   |   |   |   |   |
| 2   |   |   |   |   |
| 3   |   |   |   |   |
| 4   |   |   |   |   |
| 5   |   |   |   |   |
| 6   |   |   |   |   |
| 7   |   |   |   |   |
| 8   |   |   |   |   |
| 9   |   |   |   |   |
| 10  |   |   |   |   |



แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน  
 แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6  
 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  
 เล่ม 3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ชื่อ.....ชั้น..... เลขที่.....  
 โรงเรียนบ้านไร่วิทยา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

| รายการ            | คะแนนเต็ม | คะแนนที่ได้ | ความก้าวหน้า | คิดเป็นร้อยละ |
|-------------------|-----------|-------------|--------------|---------------|
| การทดสอบก่อนเรียน | 10        |             |              |               |
| การทดสอบหลังเรียน | 10        |             |              |               |



แบบบันทึกความก้าวหน้าของแบบฝึกทักษะ  
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6  
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  
เล่ม 3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ชื่อ.....ชั้น..... เลขที่.....  
โรงเรียนบ้านไร่วิทยา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

| แบบฝึกทักษะที่ | คะแนนเต็ม | คะแนนที่ได้ | คิดเป็นร้อยละ | ผ่านเกณฑ์* | ไม่ผ่านเกณฑ์** |
|----------------|-----------|-------------|---------------|------------|----------------|
| 3.1            | 10        |             |               |            |                |
| 3.2            | 10        |             |               |            |                |
| 3.3            | 10        |             |               |            |                |
| รวมทั้งหมด     | 30        |             |               |            |                |
| เฉลี่ย         |           |             |               |            |                |
| คิดเป็นร้อยละ  |           |             |               |            |                |

\* ผ่านเกณฑ์                      หมายความว่า                      ผู้เรียนได้คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม  
 \*\* ไม่ผ่านเกณฑ์                      หมายความว่า                      ผู้เรียนได้คะแนนน้อยกว่าร้อยละ 80 ของคะแนนเต็ม



- กนกวลี อุษณกรกุล และรณชัย มาเจริญทรัพย์. (2548). แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด. (2554). แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 6. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- กมลเอก ไทยเจริญ. (ม.ป.ป.). คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.
- กานดา ลือสุทธิวิบูลย์ และยุพิน จิรสุขานนท์. (2548). สรุปคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ม. 4 – 5 – 6 รายวิชาพื้นฐานและรายวิชาเพิ่มเติม. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). คณิตศาสตร์ Pure Pure ม.6 (2 ภาคเรียน) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด. (ม.ป.ป.). เฉลยข้อสอบ Entrance คณิตศาสตร์ 15 พ.ศ.. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด.
- เชษฐา ชื่นสกุลดี. (ม.ป.ป.). คู่มือเตรียมสอบ PAT 1 ความถนัดทางคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: ห้างหุ้นส่วนจำกัดรุ่งเรืองสาส์นการพิมพ์.
- ณรงค์ ปั่นนิ่ม และคณะ. (2537). คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์รวม ม.4-5-6 . กรุงเทพฯ: ภูมิบัณฑิตการพิมพ์ จำกัด.
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2. กรุงเทพฯ: แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด.
- ประชา ศิวเวทกุล. (2555). ญูแจคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 รายวิชาเพิ่มเติม เล่ม 6. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- เลิศ สิทธิโกศล. (ม.ป.ป.). คณิตศาสตร์แผนใหม่ แคลคูลัส ม.ปลาย 4-5-6. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ แมสพับลิชชิง.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว. (2554). คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สมัย เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.4-5-6 สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด. (ม.ป.ป.). Mathematics Problems โจทย์คณิตศาสตร์ ม. 4-5-6. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.
- สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพรรณ เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). คณิตศาสตร์พื้นฐาน + เพิ่มเติม เล่มที่ 6 ช่วงชั้นที่ 4 (มัธยมศึกษาปีที่ 4-6). กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาติบุตร. (2556). แคลคูลัส Calculus 1

ฉบับเสริมประสบการณ์. กรุงเทพฯ: บริษัทพิมพ์ดีการพิมพ์ จำกัด.

สุเทพ จันทรสมศักดิ์. (ม.ป.ป.). คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015.

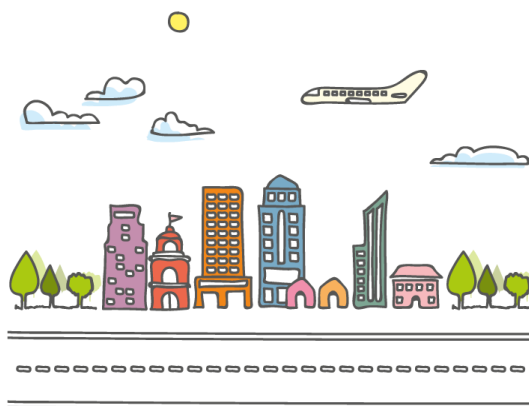
กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ภูมิบัณฑิต.

อเนก หิรัญ. (2544). คณิตศาสตร์ ม.6 ค 015. กรุงเทพฯ: หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์ เซ็นเตอร์.

\_\_\_\_\_. (ม.ป.ป.). แบบฝึกหัดพื้นฐาน วิชาคณิตศาสตร์ ม.6 ค 015. กรุงเทพฯ:

หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

Finney ,Ross L. and other. (2007). Calculus Graphical, Numerical, Algebraic  
Third Edition. Upper Saddle River. New Jersey: Prentice Hall.





### เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

| ข้อ | คำตอบ |
|-----|-------|
| 1   | ง     |
| 2   | ค     |
| 3   | ก     |
| 4   | ค     |
| 5   | ก     |
| 6   | ข     |
| 7   | ค     |
| 8   | ค     |
| 9   | ง     |
| 10  | ข     |

### เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

| ข้อ | คำตอบ |
|-----|-------|
| 1   | ข     |
| 2   | ค     |
| 3   | ง     |
| 4   | ง     |
| 5   | ก     |
| 6   | ก     |
| 7   | ข     |
| 8   | ข     |
| 9   | ค     |
| 10  | ค     |

### เฉลยแบบฝึกทักษะ 3.1

1.  $f(x) = x + 5$                       ที่  $x = 5$

วิธีทำ จาก  $f(x)$                        $= x + 5$   
           จะได้  $f(5)$                        $= 5 + 5$   
                                                   $= 10$   
           และ  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$                        $= \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5)$   
                                                   $= 10$

นั่นคือ  $f(5) = \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 5$

2.  $f(x) = \frac{1}{x + 2}$                       ที่  $x = 5$

วิธีทำ จาก  $f(x)$                        $= \frac{1}{x + 2}$   
           จะได้  $f(5)$                        $= \frac{1}{5 + 2}$   
                                                   $= \frac{1}{7}$   
           และ  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$                        $= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x + 2}$   
                                                   $= \frac{1}{7}$

นั่นคือ  $f(5) = \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 5$



$$3. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; \quad x \neq 2 \\ 4 & ; \quad x = 2 \end{cases} \quad \text{ที่ } x = 2$$

วิธีทำ

$$\text{จาก} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; \quad x \neq 2 \\ 4 & ; \quad x = 2 \end{cases}$$

$$\text{จะได้} \quad f(2) = 4$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 2$

$$4. f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} \quad ; \quad \text{ที่ } x = 1$$

วิธีทำ จาก  $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$

$$f(1) = \frac{0}{0}$$

เนื่องจาก  $f(1)$  หาค่าไม่ได้  
ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 1$

$$5. f(x) = \frac{x-3}{x^2-9} \quad \text{ที่ } x = 3$$

วิธีทำ จาก  $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

$$f(3) = \frac{0}{0}$$

เนื่องจาก  $f(3)$  หาค่าไม่ได้  
ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 3$

$$6. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 36}{x - 6} & x \neq 6 \\ 4 & x = 6 \end{cases} \quad \text{ที่ } x = 6$$

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 36}{x - 6} & x \neq 6 \\ 4 & x = 6 \end{cases}$$

จะได้  $f(6) = 4$

และ  $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{x - 6}$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x - 6)(x + 6)}{x - 6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} (x + 6)$$

$$= 12$$

จะได้ว่า  $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) \neq f(6)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 6$

$$7. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & ; \quad x \neq 1 \\ 2 & ; \quad x = 1 \end{cases} \quad \text{ที่ } x = 1$$

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & ; \quad x \neq 1 \\ 2 & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

$$\text{จะได้} \quad f(1) = 2$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีที่ 1} \quad \text{พิจารณา } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{\sqrt{x}-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 1$

$$\begin{aligned}
\text{วิธีที่ 2} \quad \text{พิจารณา } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 1$

$$8. \quad f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \leq 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases} \quad \text{ที่ } x = 2$$

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \leq 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\text{จะได้ } f(2) = 2 \\
&\text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2 \\
&\text{และ } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x = 4
\end{aligned}$$

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 2$

$$9. \quad f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & ; \quad x = 2 \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; \quad x \neq 2 \end{cases} \quad \text{ที่ } x = 2$$

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & ; \quad x = 2 \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; \quad x \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{จะได้ } f(2) = 4$$

$$\begin{aligned} \text{และ } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 2$

$$10. f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} & ; \quad 1 < x \leq 2 \\ 3-x & ; \quad x > 2 \end{cases} \quad \text{ที่ } x = 1 \text{ และ } x = 2$$

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} & ; \quad 1 < x \leq 2 \\ 3-x & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

พิจารณาที่  $x = 1$

$$\text{จะได้ } f(1) = 0$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$$

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ หาค่าไม่ได้}$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 1$

พิจารณาที่  $x = 2$

$$\text{จะได้ } f(2) = 1$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-1} = 1$$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3-x) = 1$$

$$\text{จะเห็นว่า } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\text{นั่นคือ } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 2$

สรุปได้ว่า ฟังก์ชัน  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 1$  แต่ต่อเนื่องที่  $x = 2$

### เฉลยแบบฝึกทักษะ 3.2

1. กำหนด  $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$  ถ้าฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 1$  แล้ว  $f(1)$  มีค่าเท่าไร

**วิธีทำ** เนื่องจาก ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 1$

$$\text{แสดงว่า } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 10x + 3) \\ &= -4 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $f(1)$  จะต้องมามีค่าเท่ากับ  $-4$  จึงทำให้ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 1$

2. กำหนด  $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$  ถ้าฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 5$  แล้ว  $f(5)$  มีค่าเท่าไร

**วิธีทำ** เนื่องจาก ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 5$

$$\text{แสดงว่า } f(5) = \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \lim_{x \rightarrow 5} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x + 1)}{x - 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} (x + 1) \\ &= 6 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $f(5)$  จะต้องมามีค่าเท่ากับ  $6$  จึงทำให้ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 5$



3. กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \text{ และ } a \in \mathbb{R} \end{cases}$

**วิธีทำ** เนื่องจาก ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 0$

และ  $f(0) = a$

แสดงว่า  $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

พิจารณา  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 1^2}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{1+1})}$$

$$= \frac{1}{2}$$

ดังนั้น  $a$  จะต้องมามีค่าเท่ากับ  $\frac{1}{2}$  จึงทำให้ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 0$

4. กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 1} & ; \quad x \neq 5 \\ m^2 + 1 & ; \quad x = 5 \text{ และ } m \in \mathbb{R} \end{cases}$

จงพิจารณาว่า ถ้าฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 5$  แล้ว  $m$  มีค่าเท่าไร

**วิธีทำ** เนื่องจาก ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 5$

$$\text{และ} \quad f(5) = m^2 + 1$$

$$\text{แสดงว่า} \quad m^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

$$\text{พิจารณา} \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 1}$$

$$= \frac{5^2 + 2(5) - 15}{5 - 1}$$

$$= \frac{20}{4}$$

$$= 5$$

$$\text{นั่นคือ} \quad m^2 + 1 = 5$$

$$m^2 = 4$$

$$m = 2 \text{ หรือ } -2$$

ดังนั้น  $m$  จะต้องมามีค่าเท่ากับ 2 หรือ -2 จึงทำให้ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 5$

5. กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} ax & ; & x \leq 1 \\ x - b & ; & x > 1 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า ถ้าฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 1$  แล้ว  $a + b$  มีค่าเท่าไร

**วิธีทำ** เนื่องจาก ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 1$

$$\text{และ} \quad f(1) = a$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax \\ &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - b) \\ &= 1 - b \end{aligned}$$

เนื่องจาก ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \\ a &= 1 - b \end{aligned}$$

$$\text{และ } a + b = 1$$

ดังนั้นถ้าฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 1$  แล้ว  $a + b$  มีค่าเท่ากับ 1

### เฉลยแบบฝึกทักษะ 3.3

1. กำหนด  $f(x) = x^2 + 2x$  จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องบนช่วง  $(3, 5)$  หรือไม่  
**วิธีทำ** ให้  $c$  เป็นจุดใด ๆ บนช่วง  $(3, 5)$

$$\text{จาก} \quad f(x) = x^2 + 2x$$

$$\text{จะได้} \quad f(c) = c^2 + 2c$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} (x^2 + 2x) \\ &= c^2 + 2c \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

สรุปได้ว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $(3, 5)$

2. กำหนด  $f(x) = 2x + 3$  จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องบนช่วง  $(-1, 1)$  หรือไม่  
**วิธีทำ** ให้  $c$  เป็นจุดใด ๆ บนช่วง  $(-1, 1)$

$$\text{จาก} \quad f(x) = 2x + 3$$

$$\text{จะได้} \quad f(c) = 2c + 3$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} (2x + 3) \\ &= 2c + 3 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

สรุปได้ว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $(-1, 1)$

3. กำหนด  $f(x) = \frac{x+2}{x^2-2x-8}$  จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องบนช่วง  $(-1, 3]$  หรือไม่

วิธีทำ ให้  $c$  เป็นจุดใด ๆ บนช่วง  $(-1, 3)$

$$\text{จาก} \quad f(x) = \frac{x+2}{x^2-2x-8}$$

$$\text{จะได้} \quad f(c) = \frac{c+2}{c^2-2c-8}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{x+2}{x^2-2x-8} \\ &= \frac{c+2}{c^2-2c-8} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

สรุปได้ว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $(-1, 3)$

พิจารณาที่  $x = 3$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad f(3) &= \frac{3+2}{3^2-2(3)-8} \\ &= \frac{5}{5} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+2}{x^2-2x-8} \\ &= \frac{3+2}{3^2-2(3)-8} \\ &= \frac{5}{5} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = -1$$

สรุปได้ว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $(-1, 3]$

4. กำหนด  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 1}$  จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องบนช่วง  $(1, 2)$  หรือไม่

วิธีทำ ให้  $c$  เป็นจุดใด ๆ บนช่วง  $(-1, 2)$

$$\text{จาก} \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 1}$$

$$\text{จะได้} \quad f(c) = \frac{c^2 + 2c - 15}{c - 1} \quad \text{เมื่อ } c \neq 1$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 1} \\ &= \frac{c^2 + 2c - 15}{c - 1} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

สรุปได้ว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $(1, 2)$

5. กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & ; x < -1 \\ x + 6 & ; -1 \leq x < 3 \\ 3x - 1 & ; x \geq 3 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า  $f$  ต่อเนื่องบนช่วง  $[-2, 5)$  หรือไม่

วิธีทำ

จาก  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & ; x < -1 \\ x + 6 & ; -1 \leq x < 3 \\ 3x - 1 & ; x \geq 3 \end{cases}$

พิจารณาที่  $x = -1$

จะได้  $f(-1) = (-1) + 6 = 5$

เนื่องจาก  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 4) = 1 + 4 = 5$

และ  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 6) = (-1) + 6 = 5$

จะเห็นว่า  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 5 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

นั่นคือ  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 5$

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = -1$

พิจารณาที่  $x = 3$

จะได้  $f(3) = 3(3) - 1 = 8$

เนื่องจาก  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 6) = 3 + 6 = 9$

และ  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x - 1) = 9 - 1 = 8$

จะเห็นว่า  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

นั่นคือ  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  หาค่าไม่ได้

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ไม่ต่อเนื่องที่  $x = 3$

และ  $3 \in [-2, 5)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ไม่ต่อเนื่องบนช่วง  $[-2, 5)$