

คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของหน่วยการเรียนรู้เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ประกอบด้วยแบบฝึกทักษะทั้งหมด 10 เล่ม ดังนี้

- เล่ม 1 ลิมิตของฟังก์ชัน
- เล่ม 2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน
- เล่ม 3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
- เล่ม 4 อัตราการเปลี่ยนแปลง
- เล่ม 5 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
- เล่ม 6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร
- เล่ม 7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ
- เล่ม 8 ความชันของเส้นโค้ง
- เล่ม 9 อนุพันธ์อันดับสูง
- เล่ม 10 การประยุกต์ของอนุพันธ์

โดยในแบบฝึกทักษะแต่ละเล่ม ประกอบด้วยผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ครอบคลุมทั้งด้านความรู้ ด้านทักษะกระบวนการและด้านคุณลักษณะ ซึ่งกิจกรรมของแบบฝึกทักษะแต่ละเล่มเสร็จสมบูรณ์ในตัวเอง ผู้เรียนสามารถใช้ได้ด้วยตนเอง

สำหรับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4-5 เรื่อง ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน มีจุดมุ่งหมายเพื่อให้นักเรียนสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันได้ อีกทั้งยังเป็นแนวทางในการปฏิรูปกระบวนการจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ส่งเสริมผู้เรียนได้ฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์และแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง อันจะทำให้ผู้เรียนเกิดความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหามากยิ่งขึ้น เกิดความคงทนในการเรียนรู้และสามารถนำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ การค้นคว้าหาความรู้ของนักเรียนและเป็นประโยชน์ต่อผู้สนใจ เพื่อนครูและวงการศึกษต่อไป

พนารัตน์ รอดภัย



สารบัญ

	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	ข
คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับครูผู้สอน	ค
คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน	ง
ผลการเรียนรู้	จ
จุดประสงค์การเรียนรู้	จ
สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	จ
ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับผู้เรียน	ฉ
สาระสำคัญ	ช
แบบทดสอบก่อนเรียน	1
กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน	3
ยังจำได้ไหม	4
ใบความรู้ 2.1 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน	5
แบบฝึกทักษะ 2.1	11
ใบความรู้ 2.2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน (ต่อ)	16
แบบฝึกทักษะ 2.2	19
แบบทดสอบหลังเรียน	24
กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน	27
แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน	28
แบบบันทึกความก้าวหน้าของแบบฝึกทักษะ	29
บรรณานุกรม	30
ภาคผนวก	32
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	33
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	34
เฉลยแบบฝึกทักษะ 2.1	35
เฉลยแบบฝึกทักษะ 2.2	39

คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับครูผู้สอน

1. ศึกษาแผนการจัดการเรียนรู้และการใช้แบบฝึกทักษะ
2. ศึกษาและทำความเข้าใจเนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้และการดำเนินการสอน เพื่อให้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็นไปตามลำดับขั้นตอน
3. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน
4. ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้
5. ให้คำแนะนำและความช่วยเหลือนักเรียนเมื่อมีปัญหา ตามความเหมาะสมกับความสามารถและศักยภาพของนักเรียนที่แตกต่างกัน
6. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน
7. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ใช้เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน 2 ชั่วโมง



คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับผู้เรียน

1. ศึกษาการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
2. ศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้ เพื่อให้ทราบว่านักเรียนต้องรู้และปฏิบัติสิ่งใดบ้างหลังจากจบบทเรียนแล้ว
3. ทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อตรวจสอบความรู้เดิมในเรื่องที่เรียน จากนั้นตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน
4. ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้เข้าใจ แล้วทำแบบฝึกทักษะตามลำดับขั้นตอน
5. หากไม่เข้าใจหรือมีปัญหา นักเรียนสามารถปรึกษาและแลกเปลี่ยนองค์ความรู้
6. ทำแบบทดสอบหลังเรียนแล้วตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน แล้วเปรียบเทียบกับคะแนนทดสอบก่อนเรียน
7. หากยังมีข้อสงสัยและไม่เข้าใจให้กลับไปทบทวนบทเรียนจากแบบฝึกทักษะอีกครั้ง
8. นักเรียนควรซื่อสัตย์ต่อตนเอง โดยไม่เปิดดูเฉลยระหว่างศึกษาแบบฝึกทักษะ เพื่อนักเรียนจะได้พัฒนาการเรียนรู้ของตนเองอย่างเต็มความสามารถ



ผลการเรียนรู้

หาปริมาณของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชันมาให้ นักเรียนสามารถหาปริมาณของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับปริมาณของฟังก์ชันได้

ด้านทักษะกระบวนการ

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความซื่อสัตย์ สุจริต
2. มีวินัย
3. ใฝ่เรียนรู้
4. มุ่งมั่นในการทำงาน

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

1. ความสามารถในการสื่อสาร
2. ความสามารถในการคิด
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา



ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน



สาระสำคัญ

ทฤษฎีบท เมื่อ a, L และ M เป็นจำนวนจริงใด ๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ แล้ว

1. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
2. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
3. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$
4. $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
5. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$
6. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - M$
7. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot M$
8. $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
9. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$
10. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+ - \{1\}$
 $\sqrt[n]{f(x)} \in \mathbb{R}$ และ $\sqrt[n]{L} \in \mathbb{R}$

แบบทดสอบก่อนเรียน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เล่ม 2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกที่สุด

1. ข้อใดคือคำตอบของ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-2x-3}$

ก. 1

ข. 0

ค. $\frac{1}{4}$

ง. หาค่าไม่ได้

2. $\lim_{x \rightarrow 1} (2x+3)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 2

ข. 3

ค. 4

ง. 5

3. $\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(x-3)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. -5

ข. -4

ค. -3

ง. -2

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. -4

ข. $-\frac{1}{4}$

ค. $\frac{1}{4}$

ง. 4

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-25}{x+5}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. -4

ข. $-\frac{1}{4}$

ค. $\frac{1}{4}$

ง. 4



6. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. -10

ข. 5

ค. 10

ง. 25

7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{11}{4}$

ข. $\frac{15}{4}$

ค. $\frac{21}{4}$

ง. $\frac{27}{4}$

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{1}{4}$

ข. $\frac{1}{3}$

ค. $\frac{2}{3}$

ง. $\frac{3}{4}$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{1}{5}$

ข. $\frac{1}{4}$

ค. $\frac{1}{3}$

ง. $\frac{1}{2}$

10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{1}{16}$

ข. $\frac{1}{24}$

ค. $\frac{1}{32}$

ง. $\frac{1}{48}$

กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

ยังจำได้ไหม

เราจะมีวิธีการหาขีดจำกัดของฟังก์ชันได้อย่างไรนะ



ขีดจำกัดของฟังก์ชันสามารถหาได้โดย.....

.....

.....

.....

.....

.....



แนวคำตอบ จะต้องตรวจสอบว่าขีดจำกัดซ้ายและขีดจำกัดขวาของฟังก์ชันมีค่าเท่ากันหรือไม่ ถ้าเท่ากัน ค่าตอบของขีดจำกัดที่ได้จะมีค่าเท่ากับขีดจำกัดซ้ายและขีดจำกัดขวาที่หาได้ แต่ถ้าขีดจำกัดซ้ายและขีดจำกัดขวาของฟังก์ชันมีค่าไม่เท่ากัน ขีดจำกัดของฟังก์ชันนั้นจะหาค่าไม่ได้

ใบความรู้ 2.1

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 1 เมื่อ a, L และ M เป็นจำนวนจริงใด ๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ แล้ว

1. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
2. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
3. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$
4. $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
5. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$
6. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - M$
7. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot M$
8. $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
9. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$
10. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$
เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+ - \{1\}$, $\sqrt[n]{f(x)} \in \mathbb{R}$ และ $\sqrt[n]{L} \in \mathbb{R}$

จากทฤษฎีบท 1 ข้อ 3 และ 4 จะได้ว่า

ถ้า $p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_1 x + c_0$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยอาศัย
ทฤษฎีบท 1 ข้อ 5 และข้อ 6 จะได้ผลตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2 ถ้า p เป็นฟังก์ชันพหุนามแล้ว สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $p(x) = x^2 + 2x - 3$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2} p(x) = p(2) = (2)^2 + 2(2) - 3 = 5$

จากทฤษฎีบท 2 จะเห็นว่า ในการหาขีดจำกัดของฟังก์ชันพหุนาม เมื่อ x เข้าใกล้ a นั้น
สามารถหาขีดจำกัดได้โดยการแทน x ในพหุนามด้วย a

โดยอาศัยทฤษฎีบท 1 ข้อ 8 และทฤษฎีบท 2 จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จากทฤษฎีบท $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

เช่น 1. $\lim_{x \rightarrow 3} 5 = 5$

2. $\lim_{x \rightarrow -1} 2 = 2$

ตัวอย่างที่ 2 จากทฤษฎีบท $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

เช่น 1. $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$

ตัวอย่างที่ 3 จากทฤษฎีบท $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$

เช่น 1. $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 3^2$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 2^3$

ตัวอย่างที่ 4 จากทฤษฎีบท $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

เช่น 1. $\lim_{x \rightarrow -1} 2x = 2 \lim_{x \rightarrow -1} x$
 $= 2(-1)$
 $= -2$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \lim_{x \rightarrow 3} 5x^2 &= 5 \lim_{x \rightarrow 3} x^2 \\
 &= 5(3)^2 \\
 &= 5(9) \\
 &= 45
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 จากทฤษฎีบท $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$

$$\begin{aligned}
 \text{เช่น} \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x + x^2) &= \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} x^2 \\
 &= 3 + 3^2 \\
 &= 3 + 9 \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6 จากทฤษฎีบท $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - M$

$$\begin{aligned}
 \text{เช่น} \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x - x^2) &= \lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} x^2 \\
 &= 3 - 3^2 \\
 &= 3 - 9 \\
 &= -6
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7 จากทฤษฎีบท $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot M$

$$\begin{aligned}
 \text{เช่น} \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x \cdot x^2) &= (\lim_{x \rightarrow 3} x)(\lim_{x \rightarrow 3} x^2) \\
 &= 3(3^2) \\
 &= 3(9) \\
 &= 27
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 8 จากทฤษฎีบท $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$

เช่น
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{x}{x^2} \right] &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2} \\ &= \frac{3}{3^2} \\ &= \frac{3}{9} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 9 จากทฤษฎีบท $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$

เช่น
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} (3x)^2 &= (\lim_{x \rightarrow -2} 3x)^2 \\ &= [3(-2)]^2 \\ &= (-6)^2 \\ &= 36 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 10 จากทฤษฎีบท $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$
เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+ - \{1\}$, $\sqrt[n]{f(x)} \in \mathbb{R}$ และ $\sqrt[n]{L} \in \mathbb{R}$

เช่น ให้ $f(x) = \sqrt{2x+4}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} \sqrt{2x+4} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} (2x+4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2\left(\frac{5}{2}\right) + 4} \\
 &= \sqrt{9} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 11 จงหา $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 7x - 12)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 7x - 12) &= \lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 0} 7x - \lim_{x \rightarrow 0} 12 \quad (\text{ทฤษฎีบท 1 ข้อ 5}) \\
 &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 7 \lim_{x \rightarrow 0} x - 12 \quad (\text{ทฤษฎีบท 1 ข้อ 4, 1}) \\
 &= 3(0)^2 + 7(0) - 12 \\
 &= -12
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 12 จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2}{9} - \frac{x}{2} \right)^{-1}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2}{9} - \frac{x}{2} \right)^{-1} &= \left(\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{9} - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{2} \right)^{-1} \quad (\text{ทฤษฎีบท 1 ข้อ 6}) \\
 &= \left(\frac{3^2}{9} - \frac{3}{2} \right)^{-1} \quad (\text{ทฤษฎีบท 1 ข้อ 2}) \\
 &= \left(\frac{9}{9} - \frac{3}{2} \right)^{-1} \\
 &= \left(1 - \frac{3}{2} \right)^{-1} \\
 &= \left(\frac{2-3}{2} \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{-1}{2} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{2}{-1} \right) \\ &= -2 \end{aligned}$$



แบบฝึกทักษะ 2.1

คำชี้แจง จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตหาค่าได้ (ข้อละ 1 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

1. $\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{2}} (-x + 2)$

วิธีทำ $\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{2}} (-x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\frac{5}{2}} (-x) + \lim_{x \rightarrow -\frac{5}{2}} 2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x^2 - 4)$

วิธีทำ $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x^2 - 4) = \lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 4$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{x^2}{2} + 2x + 4 \right)$$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)(x - 1)$$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

วิธีทำ

6. $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)(x - 1)$

วิธีทำ

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x^2 - 2}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. $\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 - 6x + 5)^2$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 2x - 1)$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt[3]{x + 2}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบความรู้ 2.2

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน (ต่อ)

ทฤษฎีบท 3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันตรรกยะ โดยที่ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ p และ q เป็นฟังก์ชัน

พหุนามแล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{p(a)}{q(a)}$ สำหรับจำนวนจริง a ใดๆ ที่ $q(a) \neq 0$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $f(x) = \frac{x-4}{x^2-6x+8}$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1-4}{(1)^2-6(1)+8} = -1$

ตัวอย่างที่ 13 จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+5}{\sqrt{1+x}}$

วิธีทำ พิจารณา $\sqrt{1+x}$ เมื่อแทน $x = 3$

จะได้ว่า $\sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \neq 0$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+5}{\sqrt{1+x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x+5)}{\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{1+x}}$ (ทฤษฎีบท 1 ข้อ 8)

$= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 5}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (1+x)}}$ (ทฤษฎีบท 1 ข้อ 5, 10)

$= \frac{3+5}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} 1 + \lim_{x \rightarrow 3} x}}$ (ทฤษฎีบท 1 ข้อ 2, 1, 5)

$= \frac{8}{\sqrt{1+3}}$ (ทฤษฎีบท 1 ข้อ 1, 2)

$= \frac{8}{\sqrt{4}}$

$= \frac{8}{2}$

$= 4$

จากทฤษฎีบท 3 ถ้า $q(a) = 0$ ต้องใช้การจัดรูปของฟังก์ชันตรรกยะช่วยในการหาลิมิตของฟังก์ชันตามตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 14 จงหา $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \text{เนื่องจาก } \frac{x^2 - 1}{x + 1} &= \frac{x^2 - 1^2}{x + 1} \\
 &= \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} \quad \text{เมื่อ } x \neq -1 \\
 &= x - 1 \\
 \text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) \\
 &= -2
 \end{aligned}$$



ตัวอย่างที่ 15 จงหา $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1}$ เมื่อ $x \neq 1$

$= x - 2$ แยกตัวประกอบ

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2)$
 $= -1$

ตัวอย่างที่ 16 จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} \times \frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+6}+3}$ เมื่อ $x \neq 3$

$= \frac{(x+6)-9}{(x-3)\sqrt{x+6}+3}$

$= \frac{x-3}{(x-3)\sqrt{x+6}+3}$

$= \frac{1}{\sqrt{x+6}+3}$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+6}+3}$

$= \frac{1}{6}$

ใช้ลิมิตของส่วนที่มีเครื่องหมาย
กรณฑ์คูณทั้งเศษและส่วน

แบบฝึกทักษะ 2.2

จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตหาค่าได้ (ข้อละ 2 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4}$$

วิธีทำ พิจารณา $x - 4$ เมื่อแทน $x = 2$

จะได้ว่า $2 - 4 = -2 \neq 0$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4} = \dots\dots\dots$

[illegible]

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad & \text{เนื่องจาก } \frac{x+1}{x^2+5x+4} = \frac{x+1}{(x+4)(x+1)} \quad \text{เมื่อ } x \neq -1 \\ & = \frac{1}{x+4} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+5x+4} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+4}$

[illegible]

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{x^3 - 2^3}{x - 2}$ เมื่อ $x \neq 2$

$= \frac{(x - 2)(\quad)}{x - 2}$ จัดใน

จัดในรูปแบบผลต่างกำลังสาม

[illegible]

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x} = \frac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3-x}+\sqrt{3})}{x \cdot (\sqrt{3-x}+\sqrt{3})}$ เมื่อ $x \neq 0$

5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$

[illegible]

แบบทดสอบหลังเรียน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เล่ม 2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกที่สุด

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 4

ข. $\frac{1}{4}$

ค. $-\frac{1}{4}$

ง. -4

2. $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)(x - 3)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. -2

ข. -3

ค. -4

ง. -5

3. ข้อใดคือคำตอบของ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 2x - 3}$

ก. 1

ข. 0

ค. $\frac{1}{4}$

ง. หาค่าไม่ได้

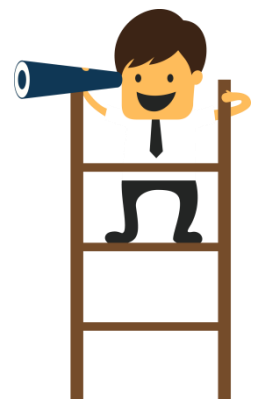
4. $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 5

ข. 4

ค. 3

ง. 2



5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 25}{x + 5}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. -4

ข. $-\frac{1}{4}$

ค. $\frac{1}{4}$

ง. 4

6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{11}{4}$

ข. $\frac{15}{4}$

ค. $\frac{21}{4}$

ง. $\frac{27}{4}$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{1}{4}$

ข. $\frac{1}{3}$

ค. $\frac{2}{3}$

ง. $\frac{3}{4}$

8. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 25

ข. 10

ค. 5

ง. -10

9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{1}{16}$

ข. $\frac{1}{24}$

ค. $\frac{1}{32}$

ง. $\frac{1}{48}$

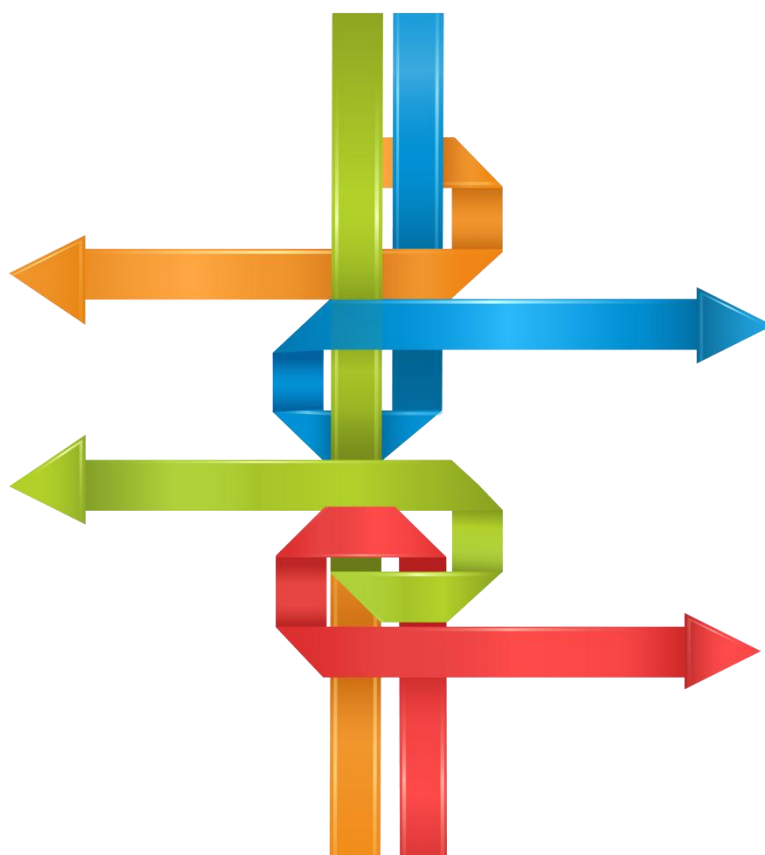
10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{1}{5}$

ข. $\frac{1}{4}$

ค. $\frac{1}{3}$

ง. $\frac{1}{2}$



กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน
 แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
 เล่ม 2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

โรงเรียนบ้านไรวีทยา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	ความก้าวหน้า	คิดเป็นร้อยละ
การทดสอบก่อนเรียน	10			
การทดสอบหลังเรียน	10			



แบบบันทึกความก้าวหน้าของแบบฝึกทักษะ
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
เล่ม 2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน

ชื่อ.....ชั้น..... เลขที่.....
โรงเรียนบ้านไร่วิทยา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

แบบฝึกทักษะที่	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	คิดเป็นร้อยละ	ผ่านเกณฑ์*	ไม่ผ่านเกณฑ์**
2.1	10				
2.2	10				
รวมทั้งหมด	20				
เฉลี่ย					
คิดเป็นร้อยละ					

* ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
 ** ไม่ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนน้อยกว่าร้อยละ 80 ของคะแนนเต็ม



บรรณานุกรม

- กนกวลี อุษณกรกุล และรณชัย มาเจริญทรัพย์. (2548). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด. (2554). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- กมลเอก ไทยเจริญ. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.
- กานดา ลือสุทธิวิบูลย์ และยุพิน จิรสุขานนท์. (2548). **สรุปคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ม. 4 – 5 – 6 รายวิชาพื้นฐานและรายวิชาเพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์ Pure Pure ม.6 (2 ภาคเรียน) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ Entrance คณิตศาสตร์ 15 พ.ศ.**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด.
- เชษฐ์ ชั้นสกุลดี. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ PAT 1 ความถนัดทางคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: ห้างหุ้นส่วนจำกัดรุ่งเรืองสาส์นการพิมพ์.
- ณรงค์ ปั่นนิ่ม และคณะ. (2537). **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์รวม ม.4-5-6**. กรุงเทพฯ: ภูมิบัณฑิตการพิมพ์ จำกัด.
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2**. กรุงเทพฯ: แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด.
- ประชา ศิวเวทกุล. (2555). **กฏูญแจคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 รายวิชาเพิ่มเติม เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- เลิศ สิทธิโกศล. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์แผนใหม่ แคลคูลัส ม.ปลาย 4-5-6**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ แมสพับลิชชิง.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว. (2554). **คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สมัย เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.4-5-6 สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด. (ม.ป.ป.). **Mathematics Problems โจทย์คณิตศาสตร์ ม. 4-5-6**. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.
- สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพรณ เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน + เพิ่มเติม เล่มที่ 6 ช่วงชั้นที่ 4 (มัธยมศึกษาปีที่ 4-6)**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาติบุตร. (2556). แคลคูลัส Calculus 1

ฉบับเสริมประสบการณ์. กรุงเทพฯ: บริษัทพิมพ์ดีการพิมพ์ จำกัด.

สุเทพ จันทรสมศักดิ์. (ม.ป.ป.). คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015.

กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ภูมิบัณฑิต.

อเนก หิรัญ. (2544). คณิตศาสตร์ ม.6 ค 015. กรุงเทพฯ: หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์ เซ็นเตอร์.

_____. (ม.ป.ป.). แบบฝึกหัดพื้นฐาน วิชาคณิตศาสตร์ ม.6 ค 015. กรุงเทพฯ:

หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

Finney ,Ross L. and other. (2007). Calculus Graphical, Numerical, Algebraic
Third Edition. Upper Saddle River. New Jersey: Prentice Hall.





เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อ	คำตอบ
1	ค
2	ง
3	ข
4	ข
5	ก
6	ก
7	ง
8	ค
9	ข
10	ก

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ	คำตอบ
1	ค
2	ค
3	ค
4	ก
5	ก
6	ง
7	ค
8	ง
9	ก
10	ข

เฉลยแบบฝึกทักษะ 2.1

1. $\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{2}} (-x + 2)$

วิธีทำ $\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{2}} (-x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\frac{5}{2}} (-x) + \lim_{x \rightarrow -\frac{5}{2}} 2$

$$= -\left(-\frac{5}{2}\right) + 2$$

$$= \frac{5}{2} + 2$$

$$= \frac{5 + 4}{2}$$

$$= \frac{9}{2}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x^2 - 4)$

วิธีทำ $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x^2 - 4) = \lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 4$

$$= 2^3 - 2^2 - 4$$

$$= 8 - 4 - 4$$

$$= 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{x^2}{2} + 2x + 4 \right)$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{x^2}{2} + 2x + 4 \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{x^2}{2} \right) + \lim_{x \rightarrow 1} 2x + \lim_{x \rightarrow 1} 4 \\ &= -\left(\frac{1^2}{2} \right) + 2(1) + 4 \\ &= -\frac{1}{2} + 2 + 4 \\ &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)(x - 1)$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)(x - 1) &= (\lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 2)(\lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 1) \\ &= (1 + 2)(1 - 1) \\ &= 3(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{4}$$

$$\text{วิธีทำ} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x+3)}{\lim_{x \rightarrow 2} 4}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3}{\lim_{x \rightarrow 2} 4}$$

$$= \frac{5}{4}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(x-1)$$

$$\text{วิธีทำ} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(x-1) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(x-1)$$

$$= (\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2)(\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 1)$$

$$= (2+2)(2-1)$$

$$= 4$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3x^2 - 2}$$

$$\text{วิธีทำ} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3x^2 - 2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow -1} 2}$$

$$= \sqrt{3(-1)^2 - 2}$$

$$= \sqrt{3 - 2}$$

$$= 1$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 - 6x + 5)^2$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 - 6x + 5)^2 &= (\lim_{x \rightarrow -2} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow -2} 6x + \lim_{x \rightarrow -2} 5)^2 \\ &= [2(-2)^2 - 6(-2) + 5]^2 \\ &= [8 + 12 + 5]^2 \\ &= 25^2 \\ &= 625 \end{aligned}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 2x - 1)$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 2x - 1) &= \lim_{x \rightarrow -1} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow -1} 2x - \lim_{x \rightarrow -1} 1 \\ &= 3(-1)^2 - 2(-1) - 1 \\ &= 3 + 2 - 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 6} \sqrt[3]{x + 2}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6} \sqrt[3]{x + 2} &= \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 6} x + \lim_{x \rightarrow 6} 2} \\ &= \sqrt[3]{6 + 2} \\ &= \sqrt[3]{8} \\ &= 2 \end{aligned}$$

เฉลยแบบฝึกทักษะ 2.2

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4}$

วิธีทำ พิจารณา $x - 4$ เมื่อแทน $x = 2$

จะได้ว่า $2 - 4 = -2 \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 8x + \lim_{x \rightarrow 2} 16}{\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 4} \\ &= \frac{(2)^2 - 8(2) + 16}{2 - 4} \\ &= \frac{4 - 16 + 16}{-2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 + 5x + 4}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{x + 1}{x^2 + 5x + 4} = \frac{x + 1}{(x + 4)(x + 1)}$ เมื่อ $x \neq -1$

$$= \frac{1}{x + 4}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 + 5x + 4} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x + 4} \\ &= \frac{1}{(-1) + 4} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{x^3 - 2^3}{x - 2}$ เมื่อ $x \neq 2$

$$= \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}$$

$$= x^2 + 2x + 4$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4)$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 2x + \lim_{x \rightarrow 2} 4$$

$$= (2)^2 + 2(2) + 4$$

$$= 4 + 4 + 4$$

$$= 12$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{3}}{x}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{3}}{x} = \frac{(\sqrt{3-x} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3-x} + \sqrt{3})}{x(\sqrt{3-x} + \sqrt{3})}$ เมื่อ $x \neq 0$

$$= \frac{(\sqrt{3-x})^2 - (\sqrt{3})^2}{x(\sqrt{3-x} + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{(3-x) - 3}{x(\sqrt{3-x} + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{-x}{x(\sqrt{3-x} + \sqrt{3})}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-1}{(\sqrt{3-x} + \sqrt{3})} \\
 \text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{3}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(\sqrt{3-x} + \sqrt{3})} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} \\
 &= \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\
 &= \frac{-\sqrt{3}}{6}
 \end{aligned}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad & \text{เนื่องจาก } \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} \quad \text{เมื่อ } x \neq 3 \\
 &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} \\
 &= \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{3})^2}{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} \\
 &= \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{6}
 \end{aligned}$$