



คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของหน่วยการเรียนรู้เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ประกอบด้วยแบบฝึกทักษะทั้งหมด 10 เล่ม ดังนี้

- เล่ม 1 ลิมิตของฟังก์ชัน
- เล่ม 2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน
- เล่ม 3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
- เล่ม 4 อัตราการเปลี่ยนแปลง
- เล่ม 5 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
- เล่ม 6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร
- เล่ม 7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ
- เล่ม 8 ความชันของเส้นโค้ง
- เล่ม 9 อนุพันธ์อันดับสูง
- เล่ม 10 การประยุกต์ของอนุพันธ์

โดยในแบบฝึกทักษะแต่ละเล่ม ประกอบด้วยผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ครอบคลุมทั้งด้านความรู้ ด้านทักษะกระบวนการและด้านคุณลักษณะ ซึ่งกิจกรรมของแบบฝึกทักษะแต่ละเล่มเสร็จสมบูรณ์ในตัวเอง ผู้เรียนสามารถใช้ได้ด้วยตนเอง

สำหรับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ลิมิตของฟังก์ชันเล่มนี้ จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1-3 เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน มีจุดมุ่งหมายเพื่อให้ นักเรียนสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ อีกทั้งยังเป็นแนวทางในการปฏิรูปกระบวนการจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ส่งเสริมผู้เรียนได้ฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์และแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง อันจะทำให้ผู้เรียนเกิดความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหามากยิ่งขึ้น เกิดความคงทนในการเรียนรู้และสามารถนำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ การค้นคว้าหาความรู้ของนักเรียนและเป็นประโยชน์ต่อผู้สนใจ เพื่อนครูและวงการศึกษต่อไป

พนารัตน์ รอดภัย



สารบัญ

	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	ข
คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับครูผู้สอน	ค
คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน	ง
ผลการเรียนรู้	จ
จุดประสงค์การเรียนรู้	จ
สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	จ
ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับผู้เรียน	ฉ
สาระสำคัญ	ช
แบบทดสอบก่อนเรียน	1
กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน	4
ยังจำได้ไหม	5
ใบความรู้ 1.1 ลิ้มิตของฟังก์ชัน	6
แบบฝึกทักษะ 1.1	11
ใบความรู้ 1.2 การหาลิ้มิตของฟังก์ชันโดยการเขียนกราฟ	14
แบบฝึกทักษะ 1.2	19
ใบความรู้ 1.3 การหาลิ้มิตของฟังก์ชันโดยการอ่านกราฟ	24
แบบฝึกทักษะ 1.3	25
แบบทดสอบหลังเรียน	28
กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน	31
แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน	32
แบบบันทึกความก้าวหน้าของแบบฝึกทักษะ	33
บรรณานุกรม	34
ภาคผนวก	36
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	37
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	38
เฉลยแบบฝึกทักษะ 1.1	39
เฉลยแบบฝึกทักษะ 1.2	42
เฉลยแบบฝึกทักษะ 1.3	47

คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับครูผู้สอน

1. ศึกษาแผนการจัดการเรียนรู้และการใช้แบบฝึกทักษะ
2. ศึกษาและทำความเข้าใจเนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้และการดำเนินการสอน เพื่อให้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็นไปตามลำดับขั้นตอน
3. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน
4. ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้
5. ให้คำแนะนำและความช่วยเหลือแก่นักเรียนเมื่อมีปัญหา ตามความเหมาะสมกับความสามารถและศักยภาพของนักเรียนที่แตกต่างกัน
6. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน
7. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ใช้เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน 3 ชั่วโมง



คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับผู้เรียน

1. ศึกษาการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
2. ศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้ เพื่อให้ทราบว่านักเรียนต้องรู้และปฏิบัติสิ่งใดบ้างหลังจากจบบทเรียนแล้ว
3. ทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อตรวจสอบความรู้เดิมในเรื่องที่เรียน จากนั้นตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน
4. ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้เข้าใจ แล้วทำแบบฝึกทักษะตามลำดับขั้นตอน
5. หากไม่เข้าใจหรือมีปัญหา นักเรียนสามารถปรึกษาและแลกเปลี่ยนองค์ความรู้
6. ทำแบบทดสอบหลังเรียนแล้วตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน แล้วเปรียบเทียบกับคะแนนทดสอบก่อนเรียน
7. หากยังมีข้อสงสัยและไม่เข้าใจให้กลับไปทบทวนบทเรียนจากแบบฝึกทักษะอีกครั้ง
8. นักเรียนควรซื่อสัตย์ต่อตนเอง โดยไม่เปิดดูเฉลยระหว่างศึกษาแบบฝึกทักษะ เพื่อนักเรียนจะได้พัฒนาการเรียนรู้ของตนเองอย่างเต็มความสามารถ



ผลการเรียนรู้

หาจำกัดของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

1. หาจำกัดของฟังก์ชันโดยใช้การคำนวณได้
2. หาจำกัดของฟังก์ชันโดยการเขียนกราฟได้
3. หาจำกัดของฟังก์ชันโดยการอ่านกราฟได้

ด้านทักษะกระบวนการ

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความซื่อสัตย์ สุจริต
2. มีวินัย
3. ใฝ่เรียนรู้
4. มุ่งมั่นในการทำงาน

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

1. ความสามารถในการสื่อสาร
2. ความสามารถในการคิด
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา



ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน



สาระสำคัญ

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า x มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริง a แล้ว ทำให้ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียว จะได้ว่า $f(x)$ มีลิมิตเท่ากับ L ขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a เขียนแทนด้วย
สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

แบบทดสอบก่อนเรียน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 7 (ค33207)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เล่ม 1 ลิมิตของฟังก์ชัน

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกที่สุด

1. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 3$ และ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 5$ และ $f(a) = 5$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

ก. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 5$

ข. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$

ค. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ง. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าไม่ได้

2. ถ้า $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$ และ $f(3) = 3$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

ก. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$

ข. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$

ค. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

ง. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ หาค่าไม่ได้



ใช้ข้อมูลจากตารางต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 3 - 5

ตารางแสดงค่าของ $f(x) = 2x + 3$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 แต่ $x \neq 1$

$x < 1$	
x	$f(x)$
-1	1
0.9	4.8
0.99	4.98
0.999	4.998
0.9999	4.9998

$x > 1$	
x	$f(x)$
2	7
1.1	5.2
1.01	5.02
1.001	5.002
1.0001	5.0002

3. จากตาราง $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ဂ. ၁

๒. 4

ค. 5

၇. ၇

4. จาตาราง $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ဂ. ၁

๒. 4

ค. 5

၇. ၇

5. จากตาราง $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ဂ. ၁

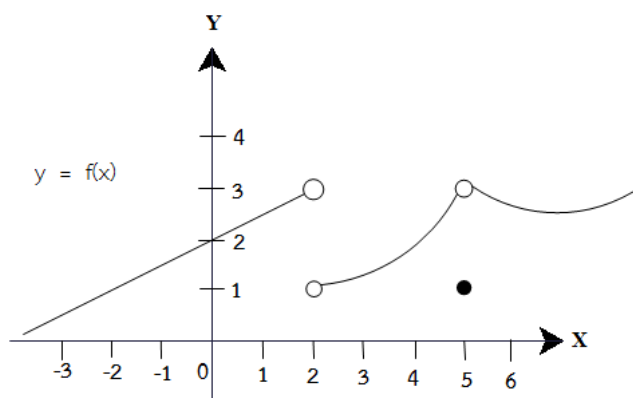
๒. 4

ค. 5

၁. ၇



กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ดังรูปด้านล่าง จงตอบคำถามข้อ 6 - 10



6. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด
ก. 1 ข. 3
ข. 5 ง. หาค่าไม่ได้
7. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด
ก. 1 ข. 3
ข. 5 ง. หาค่าไม่ได้
8. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด
ก. 1 ข. 3
ข. 5 ง. หาค่าไม่ได้
9. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด
ก. 1 ข. 3
ข. 5 ง. หาค่าไม่ได้
10. $f(5)$ มีค่าเท่ากับข้อใด
ก. 1 ข. 3
ข. 5 ง. หาค่าไม่ได้



กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				



ยังจำได้ไหม

ตอนที่เรารเรียนในชั้น ม.4 ได้เรียนเรื่องฟังก์ชัน แต่จำไม่ได้แล้วละสิว่า ฟังก์ชันคืออะไร



อ้อ ฟังก์ชันคือ.....

ถ้ากำหนดกราฟของความสัมพันธ์มาให้ เราจะมึวิธีการตรวจสอบอย่างไรว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชันหรือไม่



สำหรับวิธีการตรวจสอบว่ากราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่สามารถทำได้โดย.....



แนวคำตอบ ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ที่สมการในระนาบของความสัมพันธ์เพียงตัวเดียวเท่านั้น

ใบความรู้ 1.1 ลิมิตของฟังก์ชัน

ในการศึกษาวิชาแคลคูลัส นักเรียนจำเป็นต้องมีความรู้เกี่ยวกับเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน ทั้งนี้ เพราะกระบวนการต่าง ๆ ที่จะเกิดขึ้นในวิชาแคลคูลัสนั้น จะเริ่มต้นจากลิมิตของฟังก์ชัน

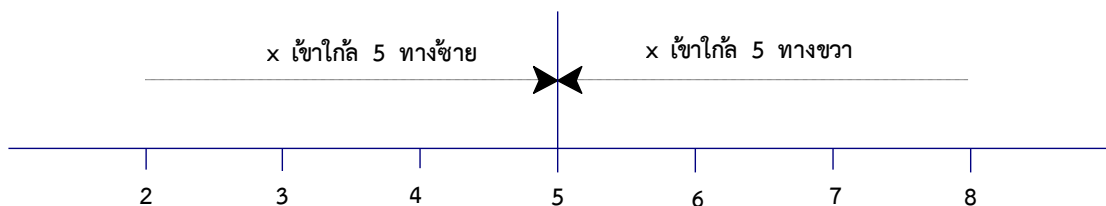
พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะพบว่า $f(x)$ จะมีค่าเท่าใดนั้น

ต้องขึ้นอยู่กับค่าของ x กล่าวคือ ถ้าค่า x เปลี่ยนแปลงแล้ว ค่าของ $f(x)$ ก็จะเปลี่ยนตามไปด้วย จาก $f(x)$ ที่กำหนดให้ข้างต้น จะพบว่า

กรณีที่ $x = 5$ จะเห็นได้ชัดเจนว่า เราไม่สามารถหาค่า $f(x)$ ได้ ทั้งนี้เพราะว่า 5 ไม่อยู่ในโดเมนของ f เพราะ $f(5) = \frac{0}{0}$ ซึ่งไม่มีความหมาย แต่สิ่งที่เราสามารถทำได้ก็คือ พยายามหาค่า

ที่ใกล้เคียงที่สุด กล่าวคือ เราจะหาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 5 มากที่สุด ($x \neq 5$)

ก่อนอื่นเรามาศึกษาคำว่า “ x เข้าใกล้ 5” จากเส้นจำนวน ดังนี้



จากเส้นจำนวน จะพบว่า x เข้าใกล้ 5 นั้น เกิดขึ้นได้ 2 ทาง คือ

ทางแรก

x เข้าใกล้ 5 ทางซ้าย (x มีค่าน้อยกว่า 5)

ทางที่สอง

x เข้าใกล้ 5 ทางขวา (x มีค่ามากกว่า 5)

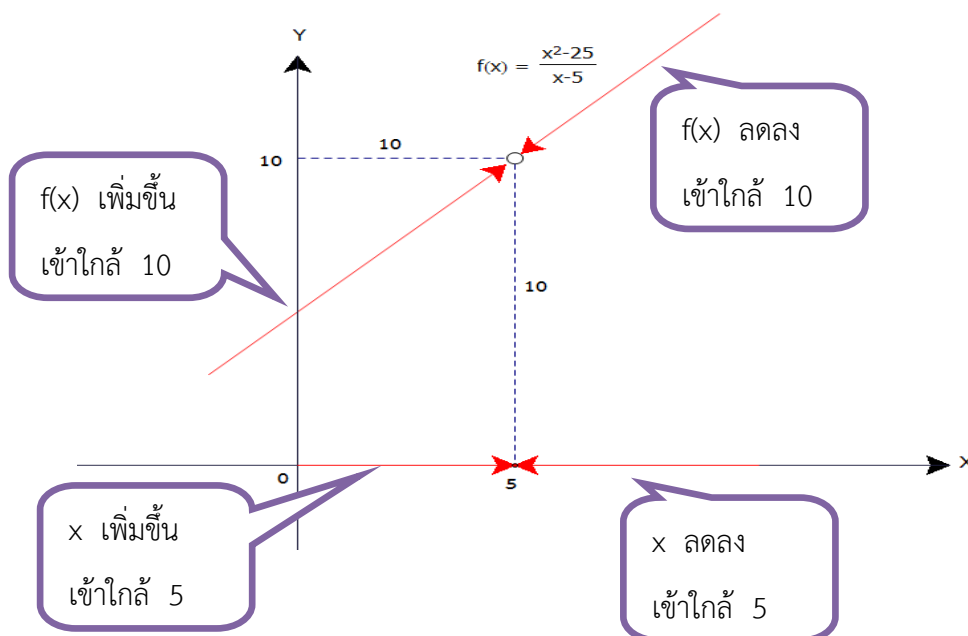
ดังนั้น ในการหาค่า $f(x)$ ขณะที่ x เข้าใกล้ 5 ต้องพิจารณาสองทาง ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 แสดงค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 5

$x < 5$		$x > 5$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
4.0	9	6.0	11
4.5	9.5	5.5	10.5
4.8	9.8	5.1	10.1
4.9	9.9	5.05	10.05
4.99	9.99	5.01	10.01
4.999	9.999	5.001	10.001
4.9999	9.9999	5.0001	10.0001

จากตารางจะเห็นได้ชัดเจนว่า เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 4 เข้าใกล้ 5 ค่าของ $f(x)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นจาก 9 เข้าใกล้ 10 ขณะเดียวกัน เมื่อ x มีค่าลดลงจาก 6 เข้าใกล้ 5 ค่าของ $f(x)$ จะมีค่าลดลงจาก 11 เข้าใกล้ 10

เราสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ ได้ดังรูป



เราพิจารณาจากตารางที่ 1 และกราฟของฟังก์ชัน จะเห็นว่าขณะที่ x เข้าใกล้ 5 ทางด้านซ้าย (นั่นคือ $x < 5$) ค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้นและเข้าใกล้ 10 **เราเรียก** 10 ว่าลิมิตซ้ายของฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5} \text{ เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 5 \text{ ทางซ้ายและเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ } \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 10$$

และในขณะเดียวกัน เมื่อเราพิจารณาจากตารางและกราฟ จะเห็นว่าขณะที่ x เข้าใกล้ 5 ทางด้านขวา (นั่นคือ $x > 5$) ค่าของ $f(x)$ จะลดลงและเข้าใกล้ 10 **เราเรียก** 10 ว่าลิมิตขวาของ

$$\text{ฟังก์ชัน } f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5} \text{ เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 5 \text{ ทางขวาและเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ } \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 10$$

จะเห็นว่าค่าของ $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ เข้าใกล้ 10 ขณะที่ x เข้าใกล้ 5 ไม่ว่าทางด้านซ้าย

หรือทางด้านขวา ในกรณีเช่นนี้จะกล่าวได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 5

จะเท่ากับ 10 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 10$

จากที่กล่าวมาแล้วพอจะสรุปได้ว่า สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_1 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย เรียก L_1 ว่าลิมิตซ้ายของ f ที่ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$

และถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_2 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางด้านขวา เรียก L_2 ว่าลิมิตขวาของ f ที่ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$

ถ้า $L_1 = L_2 = L$ จะกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน f มีลิมิตเท่ากับ L เมื่อ x เข้าใกล้ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

แต่ถ้า $L_1 \neq L_2$ จะกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้ a นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าไม่ได้

สรุปได้ว่า

โดยทั่ว ๆ ไป ถ้ากำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ และ a, L, L_1, L_2 เป็นจำนวนจริง จะใช้สัญลักษณ์แทนความหมายต่าง ๆ ของลิมิต ดังต่อไปนี้

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ แทนความหมายว่า ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ a เท่ากับ L
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ แทนความหมายว่า ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย เท่ากับ L_1 เรียก L_1 ว่าลิมิตซ้ายของ $f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ แทนความหมายว่า ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา เท่ากับ L_2 เรียก L_2 ว่าลิมิตขวาของ $f(x)$

จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $f(x) = 3x^2 - 2x$ จงหา

$$1. \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad 3. \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

วิธีทำ สร้างตารางเพื่อหาค่าของ $f(x) = 3x^2 - 2x$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 แต่ $x \neq 2$

$$x < 2$$

x	f(x)
1.0	1
1.9	7.03
1.99	7.9003
1.999	7.990003
1.9999	7.99900003

$$x > 2$$

x	f(x)
3.0	21
2.05	8.5075
2.01	8.1003
2.001	8.010003
2.0001	8.00100003

จะได้ว่า $1. \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 8$ และ $2. \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 8$

ดังนั้น $3. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $y = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 4x}$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

วิธีทำ สร้างตารางเพื่อหาค่าของ $y = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 4x}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 แต่ $x \neq 0$

$$x < 0$$

x	f(x)
-1	-1
-0.5	-1.0714
-0.1	-1.0231
-0.001	-1.0002
-0.0001	-1

$$x > 0$$

x	f(x)
1	-0.6
0.5	-0.8333
0.1	-0.9732
0.001	-0.9997
0.0001	-1

จากตาราง จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ และ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

แบบฝึกทักษะ 1.1

คำชี้แจง จงหาขีดของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยอาศัยการหาค่าของฟังก์ชันเติมในตารางที่กำหนดให้ (ข้อละ 2 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

1. $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 2)$

วิธีทำ

x <	
x	f(x)
2	
2.9	
2.99	
2.999	
2.9999	

x >	
x	f(x)
4	
3.1	
3.01	
3.001	
3.0001	

จากตาราง จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x - 2) = \dots\dots\dots$ และ $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 2) = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 2) = \dots\dots\dots$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x)$

วิธีทำ

x <	
x	f(x)
0	
0.9	
0.99	
0.999	
0.9999	

x >	
x	f(x)
2	
1.1	
1.01	
1.001	
1.0001	

จากตาราง จะได้ว่า.....
.....

3. $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x+1}$

วิธีทำ

x <	
x	f(x)
7	
7.9	
7.99	
7.999	
7.9999	

x >	
x	f(x)
9	
8.1	
8.01	
8.001	
8.0001	

จากตาราง จะได้ว่า.....

4. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1}$

วิธีทำ

x <	
x	f(x)
8	
8.9	
8.99	
8.999	
8.9999	

x >	
x	f(x)
10	
9.1	
9.01	
9.001	
9.0001	

จากตาราง จะได้ว่า.....

5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 3}{x^2 - 4}$

วิธีทำ

x <	
x	f(x)
1	
2.9	
2.99	
2.999	
2.9999	

x >	
x	f(x)
4	
3.1	
3.01	
3.001	
3.0001	

จากตาราง จะได้ว่า.....

ไปดูการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน
 โดยอาศัยการเขียนกราฟกัน:



ใบความรู้ 1.2

การหาลิมิตของฟังก์ชันโดยการเขียนกราฟ

หลักการสำคัญของการเขียนกราฟ

เมื่อโจทย์กำหนดฟังก์ชันมาให้ เราสามารถเขียนกราฟอย่างง่ายโดยใช้ขั้นตอนดังนี้

1. หาจุดตัดแกน x
2. หาจุดตัดแกน y
3. เขียนกราฟ

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = x + 4$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ โดยการเขียนกราฟ

วิธีทำ จากโจทย์ $f(x) = x + 4$

1. หาจุดตัดแกน x โดยแทน $y = 0$

$$\text{จะได้ } 0 = x + 4$$

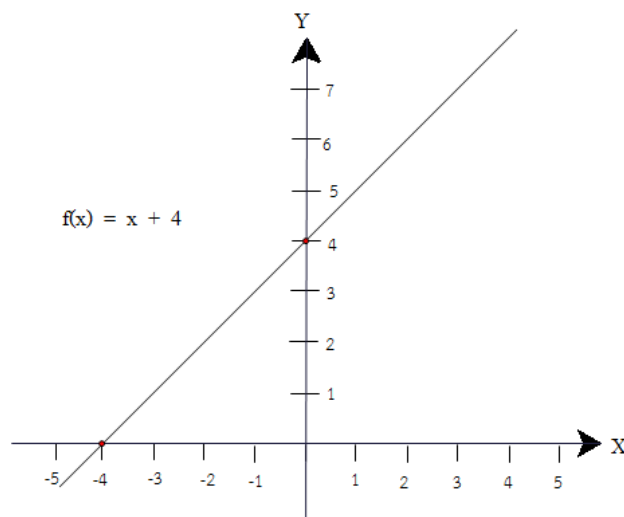
$$x = -4$$

2. หาจุดตัดแกน y โดยแทน $x = 0$

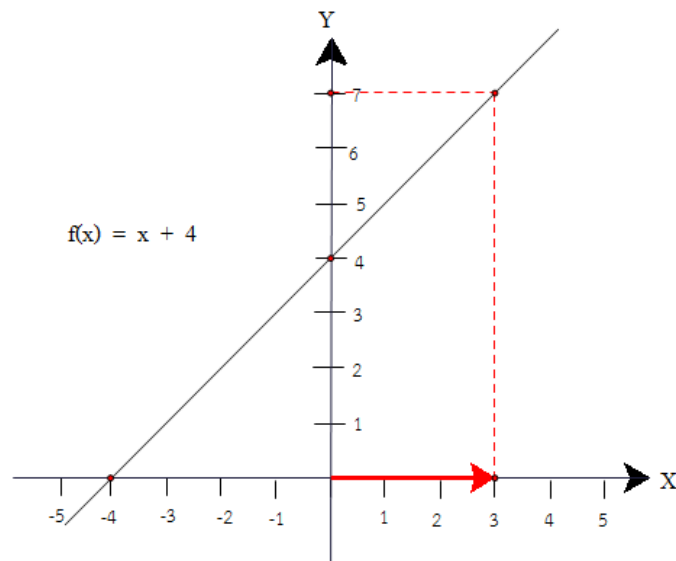
$$\text{จะได้ } f(x) = 0 + 4$$

$$f(x) = 4$$

สามารถเขียนกราฟได้ดังรูป

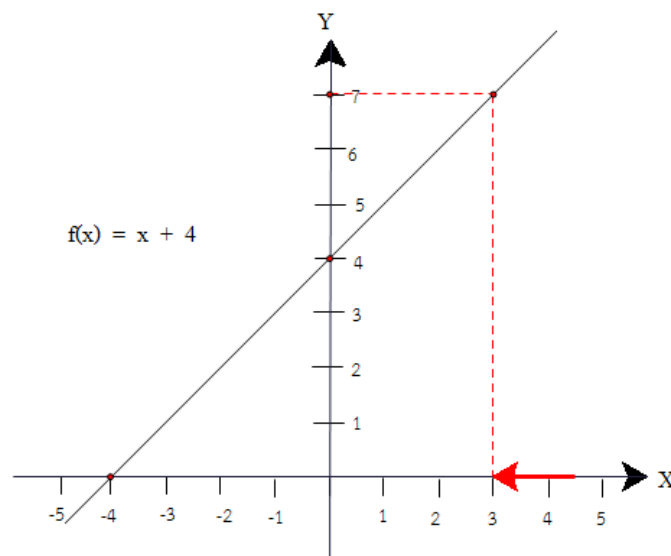


พิจารณากราฟ เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทางซ้าย ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า x เข้าใกล้ 3 ทางซ้าย ค่าของ $f(x) = x + 4$ มีค่า เพิ่มขึ้นเข้าใกล้ 7
นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 7$

พิจารณากราฟ เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทางขวา ดังนี้



ในทำนองเดียวกันจากกราฟ จะเห็นว่า x เข้าใกล้ 3 ทางขวา ค่าของ $f(x) = x + 4$ มีค่า
ลดลงเข้าใกล้ 7 นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 7$

ดังนั้น จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 7 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$

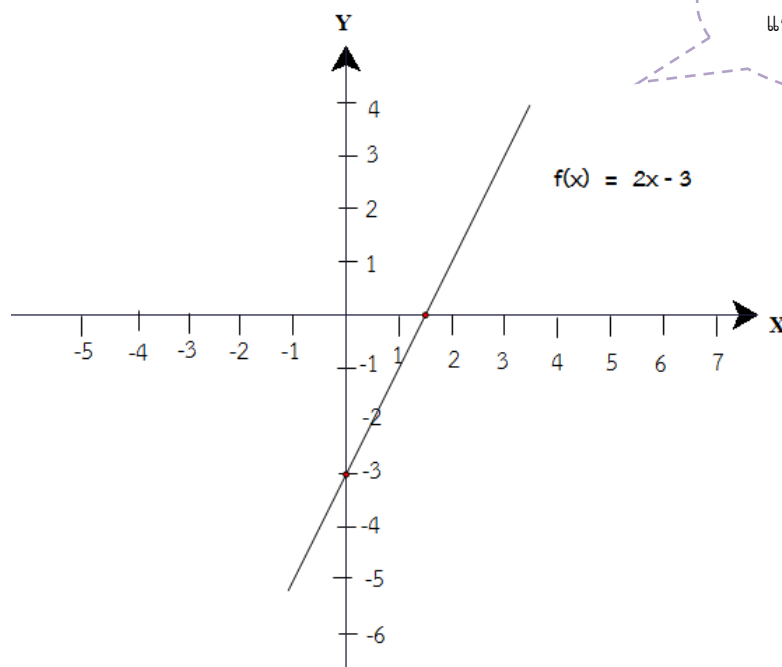
ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ โดยการเขียนกราฟ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & ; x \geq 2 \\ x^2 - 1 & ; x < 2 \end{cases}$$

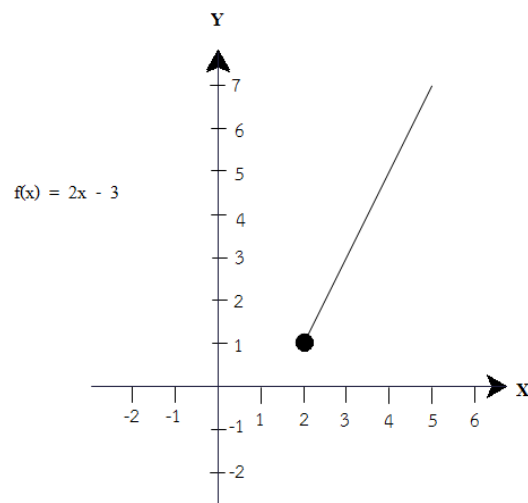
วิธีทำ จากโจทย์ สามารถแยกพิจารณาได้ 2 กรณี ดังนี้

1. กรณีที่ $x \geq 2$ จะได้

$f(x) = 2x - 3$ สามารถเขียนกราฟได้ดังรูป

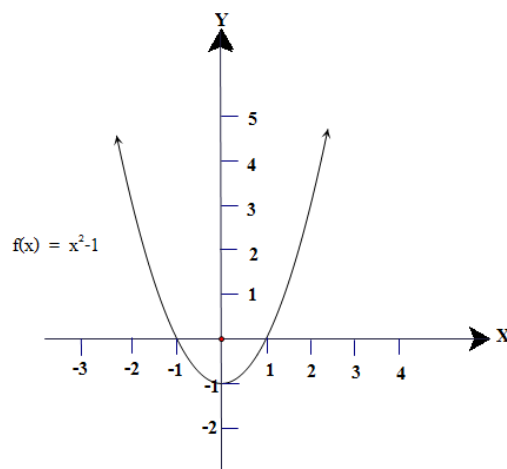


เนื่องจากเงื่อนไขของฟังก์ชันนี้คือ $x \geq 2$ ดังนั้นจะได้กราฟดังรูปต่อไปนี้

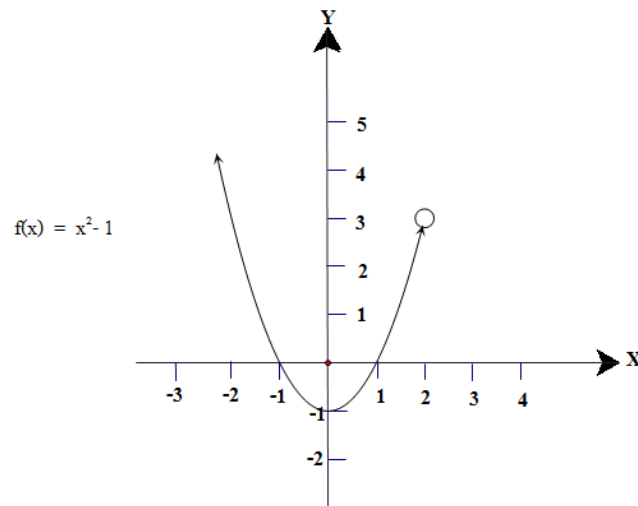


2. กรณีที่ $x < 2$ จะได้

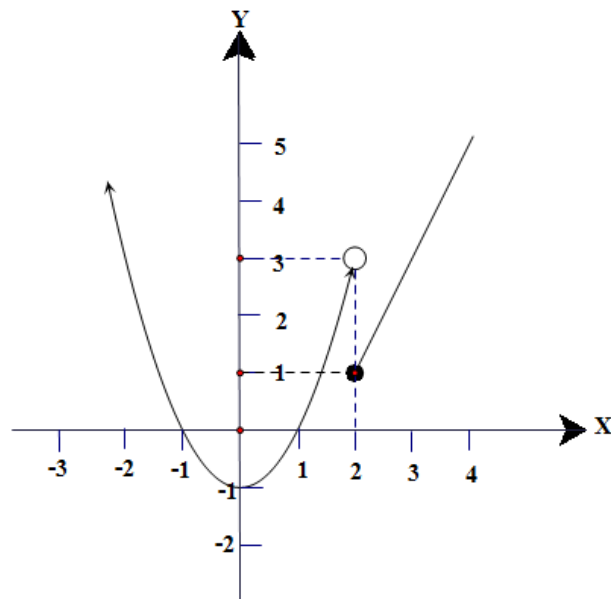
$f(x) = x^2 - 1$ สามารถเขียนกราฟได้ดังรูป



เนื่องจากเงื่อนไขของฟังก์ชันนี้คือ $x < 2$ ดังนั้นจะได้กราฟดังรูปต่อไปนี้



จากทั้งสองกรณี สามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันได้ดังนี้



$$\text{จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3 \text{ และ } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 3) = 1$$

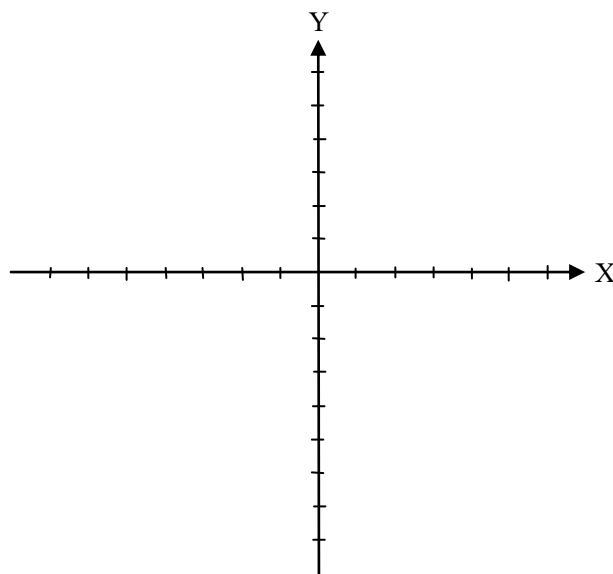
เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

แบบฝึกทักษะ 1.2

คำชี้แจง จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยการเขียนกราฟ
(ข้อละ 2 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 5)$

วิธีทำ จากโจทย์ สามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันได้ดังนี้



จากกราฟ

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x + 5) = \dots\dots\dots$

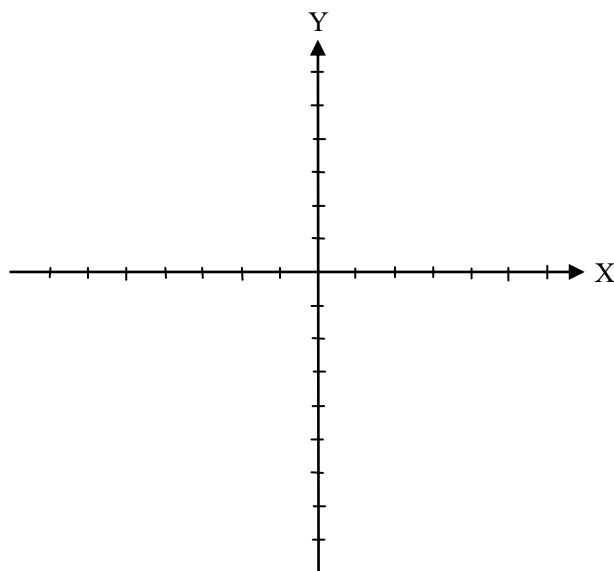
และ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + 5) = \dots\dots\dots$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \dots\dots\dots \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \dots\dots\dots$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)$

วิธีทำ จากโจทย์ สามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันได้ดังนี้



จากกราฟ

จะได้ว่า

และ

เนื่องจาก

ดังนั้น

.....

.....

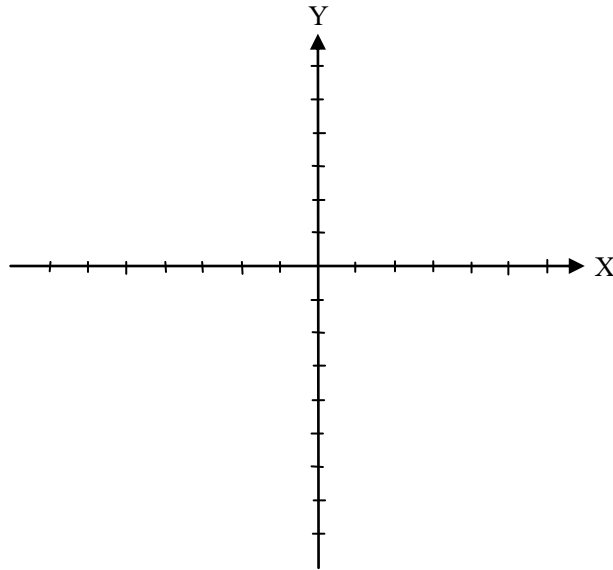
.....

.....

3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2 & ; x \leq 0 \\ 1 + x & ; x > 0 \end{cases}$

วิธีทำ จากโจทย์ สามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันได้ดังนี้



จากกราฟ

จะได้ว่า

และ

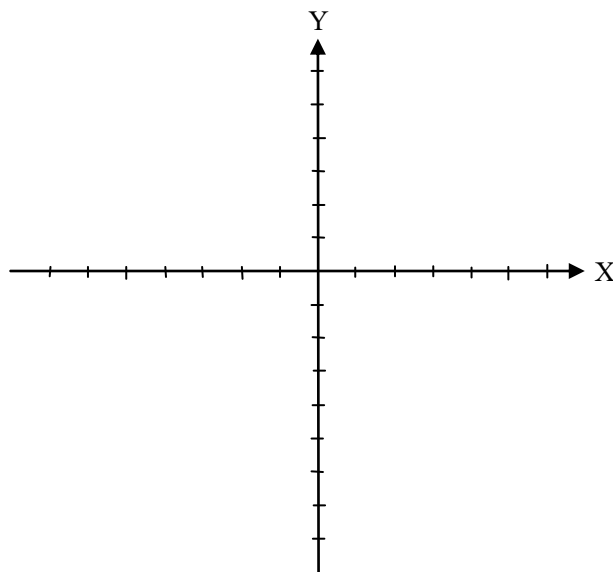
เนื่องจาก

ดังนั้น

4. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

เมื่อ $f(x) = \begin{cases} -x - 3 & ; x \leq -1 \\ x + 1 & ; x > -1 \end{cases}$

วิธีทำ จากโจทย์ สามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันได้ดังนี้



จากกราฟ

จะได้ว่า

และ

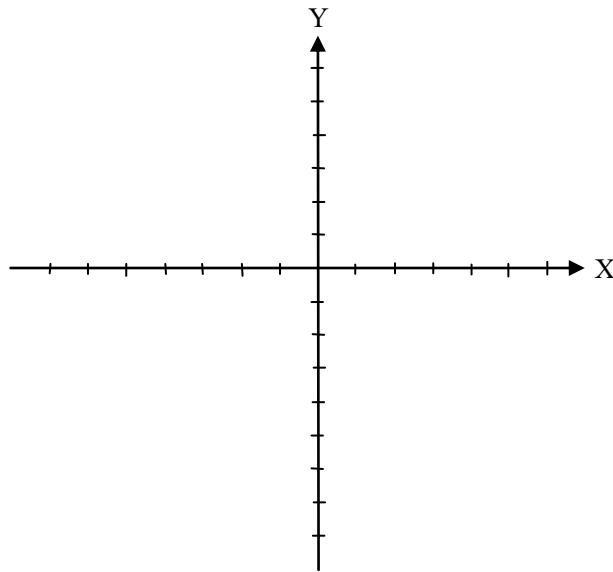
เนื่องจาก

ดังนั้น

5. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

เมื่อ $f(x) = \begin{cases} -1 & ; x \leq 1 \\ 1 & ; x > 1 \end{cases}$

วิธีทำ จากโจทย์ สามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันได้ดังนี้



จากกราฟ

จะได้ว่า

และ

เนื่องจาก

ดังนั้น

ต่อไปเป็นการหาขีดจำกัด
จากการอ่านกราฟหาคะ:



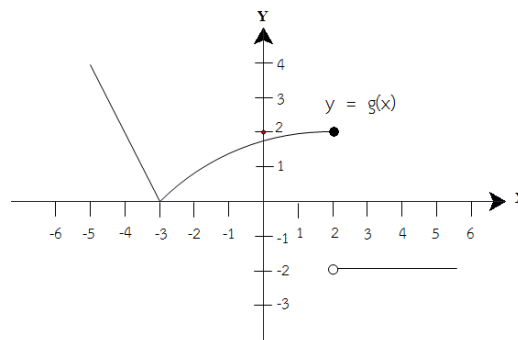
ใบความรู้ 1.3

การหาขีดจำกัดของฟังก์ชันโดยการอ่านกราฟ

หลักการหาขีดจำกัดจากการอ่านกราฟ

ต้องพิจารณาว่า เมื่อ x เข้าใกล้จำนวนจริงที่กำหนดให้ ค่าของ $f(x) = y$ มีค่าเท่าใด

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดกราฟของฟังก์ชัน g ให้ดังนี้



- จงหา 1. $\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x)$ 2. $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x)$ 3. $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ 5. $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ 6. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ 7. $f(2)$

วิธีทำ พิจารณากราฟของ $y = g(x)$ ที่กำหนดให้

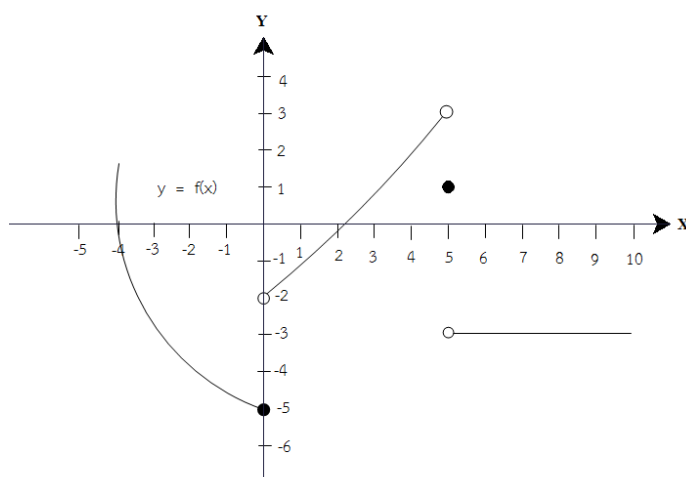
- เมื่อ x เข้าใกล้ -3 ทางด้านซ้าย ($x < -3$) จะได้ว่า ค่าของ $g(x)$ เข้าใกล้ 0
ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = 0$
- เมื่อ x เข้าใกล้ -3 ทางด้านขวา ($x > -3$) จะได้ว่า ค่าของ $g(x)$ เข้าใกล้ 0
ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = 0$
- เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = 0$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = 0$
- เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย ($x < 2$) จะได้ว่า ค่าของ $g(x)$ เข้าใกล้ 2
ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 2$
- เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา ($x > 2$) จะได้ว่า ค่าของ $g(x)$ เข้าใกล้ -2
ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -2$
- เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ หาค่าไม่ได้
- ค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด $x = 2$ มีค่าเป็น 2 ดังนั้น $f(2) = 2$

แบบฝึกทักษะ 1.3

คำชี้แจง จงหาค่าของลิมิตจากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้

(ข้อละ 1 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

1. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังแสดงในรูป



จงหา

1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$
6. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$
7. $f(5)$

วิธีทำ 1. เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย ($x < 0$) จะได้ว่า ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \dots\dots\dots$

2. เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา ($x > 0$) จะได้ว่า ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้

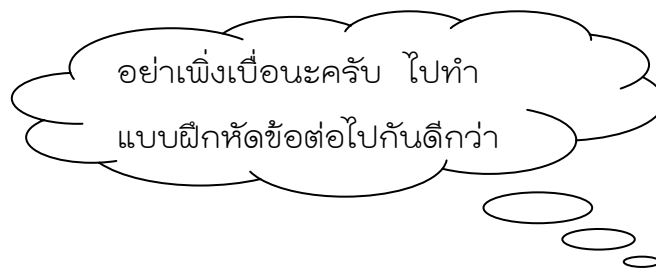
ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots\dots\dots$

3. เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \dots\dots\dots \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

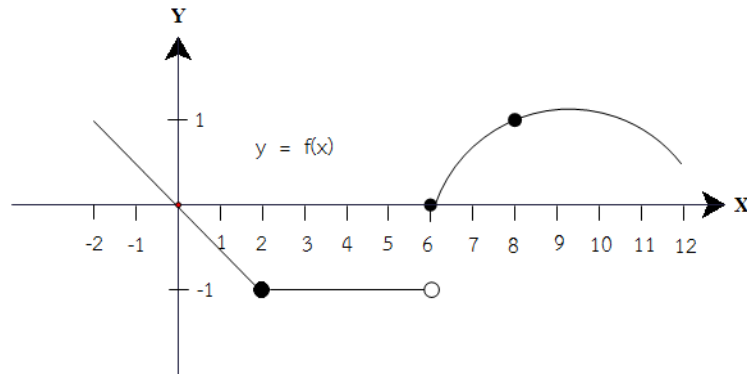
ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \dots\dots\dots$

4.

5.
.....
6.
.....
7.



2. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังแสดงในรูป



จงหา

1. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

3. $f(8)$

วิธีทำ

1. เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots\dots\dots$ และ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \dots\dots\dots$

2. เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \dots\dots\dots$ และ $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \dots\dots\dots$

3. ค่าของฟังก์ชัน f ที่ $x = \dots\dots\dots$ มีค่าเป็น $\dots\dots\dots$ ดังนั้น $f(8) = \dots\dots\dots$

ไม่ต้องใช้ไม้จิ้มฟันนะคะ



4. ถ้า $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$ และ $f(3) = 3$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง

ก. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$

ข. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

ค. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$

ง. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ หาค่าไม่ได้

5. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 3$ และ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 5$ และ $f(a) = 5$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง

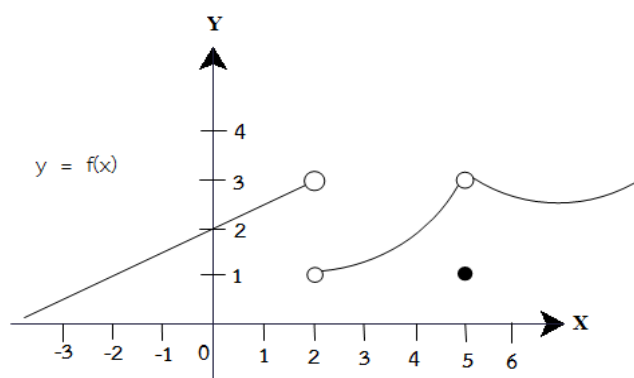
ก. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 5$

ข. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$

ค. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ง. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าไม่ได้

กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ดังรูปด้านล่าง จงตอบคำถามข้อ 6 - 10



6. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 5

ข. 3

ค. 1

ง. หาค่าไม่ได้

7. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 5

ข. 3

ค. 1

ง. หาค่าไม่ได้

8. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 5

ข. 3

ค. 1

ง. หาค่าไม่ได้

9. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ဂ. 5

๗. 3

ค. 1

ง. หาค่าไม่ได้

10. $f(5)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ဂ. 5

๗. 3

ค. 1

ง. หาค่าไม่ได้



กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน
 แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
 เล่ม 1 ลิมิตของฟังก์ชัน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....
 โรงเรียนบ้านไร่วิทยา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	ความก้าวหน้า	คิดเป็นร้อยละ
การทดสอบก่อนเรียน	10			
การทดสอบหลังเรียน	10			



แบบบันทึกความก้าวหน้าของแบบฝึกทักษะ
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
เล่ม 1 ลิมิตของฟังก์ชัน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....
โรงเรียนบ้านไร่วิทยา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

แบบฝึกทักษะที่	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	คิดเป็นร้อยละ	ผ่านเกณฑ์*	ไม่ผ่านเกณฑ์**
1.1	10				
1.2	10				
1.3	10				
รวมทั้งหมด	30				
เฉลี่ย					
คิดเป็นร้อยละ					

* ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
 ** ไม่ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนน้อยกว่าร้อยละ 80 ของคะแนนเต็ม





- กนกวลี อุษณกรกุล และรณชัย มาเจริญทรัพย์. (2548). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด. (2554). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- กมลเอก ไทยเจริญ. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง จำกัด.
- กานดา ลือสุทธิวิบูลย์ และยุพิน จิรสุขานนท์. (2548). **สรุปคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ม. 4 – 5 – 6 รายวิชาพื้นฐานและรายวิชาเพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์ Pure Pure ม.6 (2 ภาคเรียน) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ Entrance คณิตศาสตร์ 15 พ.ศ.** กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด.
- เชษฐ์ ชั้นสกุลดี. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ PAT 1 ความถนัดทางคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: ห้างหุ้นส่วนจำกัดรุ่งเรืองสาส์นการพิมพ์.
- ณรงค์ ปั่นนิ่ม และคณะ. (2537). **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์รวม ม.4-5-6**. กรุงเทพฯ: ภูมิบัณฑิตการพิมพ์ จำกัด.
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2**. กรุงเทพฯ: แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด.
- ประชา ศิวเวทกุล. (2555). **กฏแจกคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 รายวิชาเพิ่มเติม เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- เลิศ สิทธิโกศล. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์แผนใหม่ แคลคูลัส ม.ปลาย 4-5-6**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ แมสพับลิชชิ่ง.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว. (2554). **คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สมัย เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.4-5-6 สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง จำกัด. (ม.ป.ป.). **Mathematics Problems โจทย์คณิตศาสตร์ ม. 4-5-6**. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง จำกัด.
- สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพรณ เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน + เพิ่มเติม เล่มที่ 6 ช่วงชั้นที่ 4 (มัธยมศึกษาปีที่ 4-6)**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง จำกัด.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาติบุตร. (2556). แคลคูลัส Calculus 1

ฉบับเสริมประสบการณ์. กรุงเทพฯ: บริษัทพิมพ์ดีการพิมพ์ จำกัด.

สุเทพ จันทรสมศักดิ์. (ม.ป.ป.). คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015.

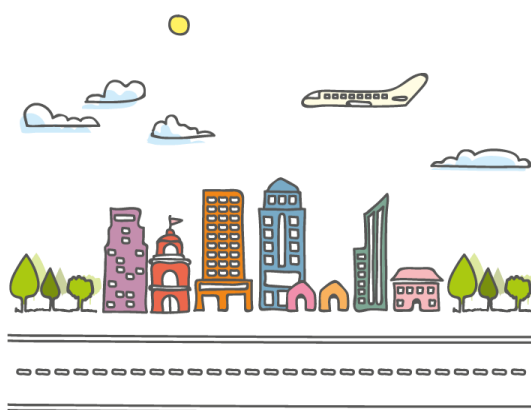
กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ภูมิบัณฑิต.

อเนก หิรัญ. (2544). คณิตศาสตร์ ม.6 ค 015. กรุงเทพฯ: หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์ เซ็นเตอร์.

_____. (ม.ป.ป.). แบบฝึกหัดพื้นฐาน วิชาคณิตศาสตร์ ม.6 ค 015. กรุงเทพฯ:

หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

Finney ,Ross L. and other. (2007). Calculus Graphical, Numerical, Algebraic
Third Edition. Upper Saddle River. New Jersey: Prentice Hall.



ภาคผนวก

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อ	คำตอบ
1	ง
2	ข
3	ค
4	ค
5	ค
6	ข
7	ก
8	ง
9	ข
10	ก

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ	คำตอบ
1	ข
2	ข
3	ข
4	ค
5	ง
6	ข
7	ค
8	ง
9	ข
10	ค

เฉลยแบบฝึกทักษะ 1.1

1. $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 2)$

วิธีทำ

$x < \dots 3 \dots$	
x	f(x)
2	0
2.9	0.9
2.99	0.99
2.999	0.999
2.9999	0.9999

$x > \dots 3 \dots$	
x	f(x)
4	2
3.1	1.1
3.01	1.01
3.001	1.001
3.0001	1.0001

จากตาราง จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x - 2) = 1$ และ $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 2) = 1$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 2) = 1$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x)$

วิธีทำ

$x < \dots 1 \dots$	
x	f(x)
0	0
0.9	-1.89
0.99	-1.9899
0.999	-1.998999
0.9999	-1.9999

$x > \dots 1 \dots$	
x	f(x)
2	-2
1.1	-2.09
1.01	-2.0099
1.001	-2.001
1.0001	-2.0001

จากตาราง จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 3x) = -2$ และ $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x) = -2$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x) = -2$

$$3. \lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x+1}$$

วิธีทำ

$x < \dots 8 \dots$	
x	f(x)
7	2.82843
7.9	2.98329
7.99	2.99833
7.999	2.99983
7.9999	2.99998

$x > \dots 8 \dots$	
x	f(x)
9	3.16228
8.1	3.01662
8.01	3.00167
8.001	3.00017
8.0001	3.00002

จากตาราง จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 8^-} \sqrt{x+1} = 3$ และ $\lim_{x \rightarrow 8^+} \sqrt{x+1} = 3$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x+1} = 3$

$$4. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$$

วิธีทำ

$x < \dots 9 \dots$	
x	f(x)
8	0.11835
8.9	0.12447
8.99	0.12495
8.999	0.12499
8.9999	0.12500

$x > \dots 9 \dots$	
x	f(x)
10	0.12914
9.1	0.12551
9.01	0.12505
9.001	0.12501
9.0001	0.12500

จากตาราง จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 9^-} \frac{\sqrt{x-2}}{x-1} = 0.125$ และ $\lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{\sqrt{x-2}}{x-1} = 0.125$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-2}}{x-1} = 0.125$

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 3}{x^2 - 4}$$

วิธีทำ

$x < \dots 3 \dots$	
x	f(x)
1	-1.33333
2.9	6.21066
2.99	6.01828
2.999	6.00180
2.9999	6.00018

$x > \dots 3 \dots$	
x	f(x)
4	5.58333
3.1	5.84510
3.01	5.98227
3.001	5.99820
3.0001	5.99982

จากตาราง จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3 + 3}{x^2 - 4} = 6$ และ $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 + 3}{x^2 - 4} = 6$

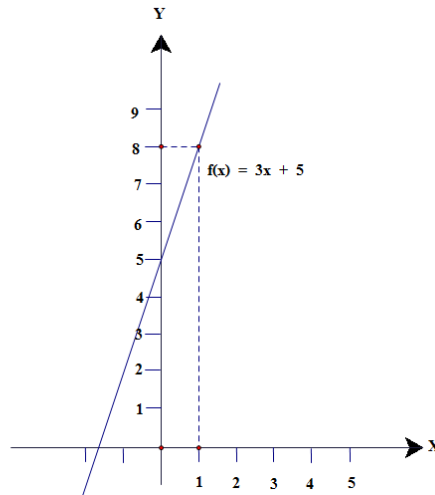
ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 3}{x^2 - 4} = 6$



เฉลยแบบฝึกทักษะ 1.2

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 5)$

วิธีทำ



จากกราฟ

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x + 5) = 8$

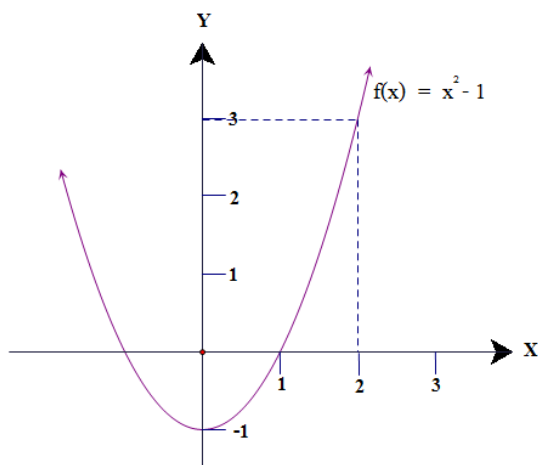
และ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + 5) = 8$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 5) = 8$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)$

วิธีทำ



จากกราฟ

จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3$$

และ

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1) = 3$$

เนื่องจาก

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

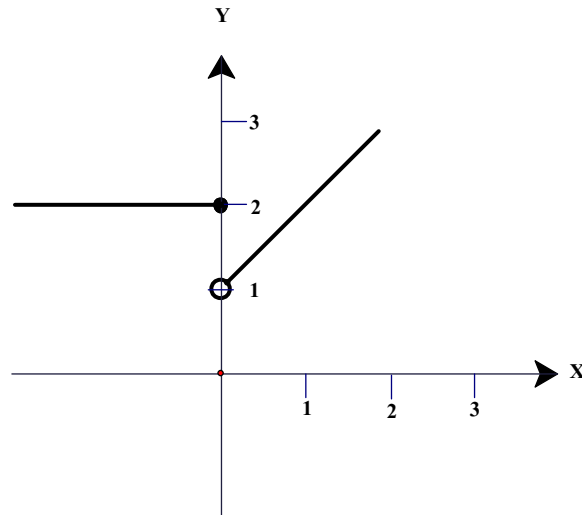
ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2 & ; x \leq 0 \\ 1 + x & ; x > 0 \end{cases}$

วิธีทำ



จากกราฟ

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$

และ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x) = 1$

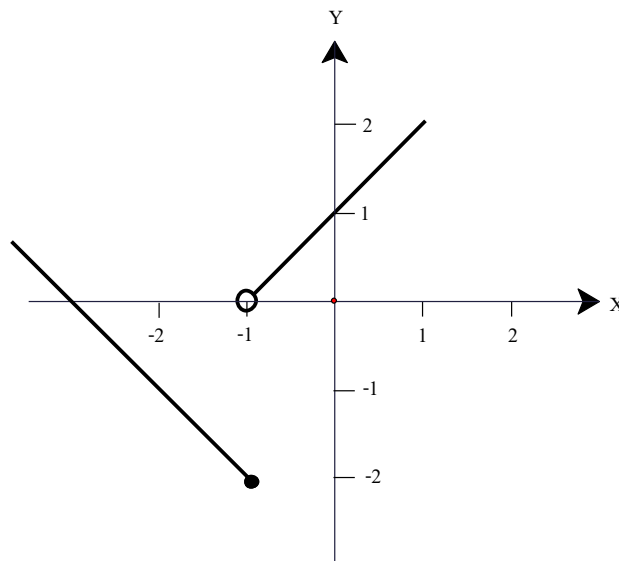
เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้

4. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

เมื่อ $f(x) = \begin{cases} -x - 3 & ; x \leq -1 \\ x + 1 & ; x > -1 \end{cases}$

วิธีทำ



จากกราฟ

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x - 3) = -2$

และ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1) = 0$

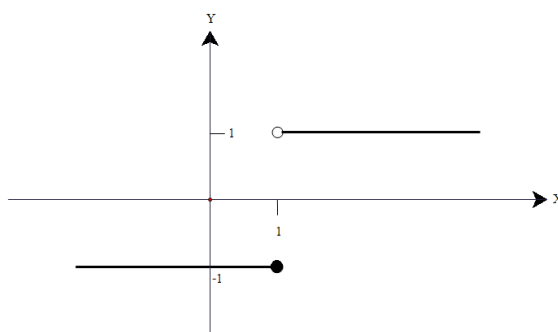
เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

5. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

เมื่อ $f(x) = \begin{cases} -1 & ; x \leq 1 \\ 1 & ; x > 1 \end{cases}$

วิธีทำ



จากกราฟ

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$

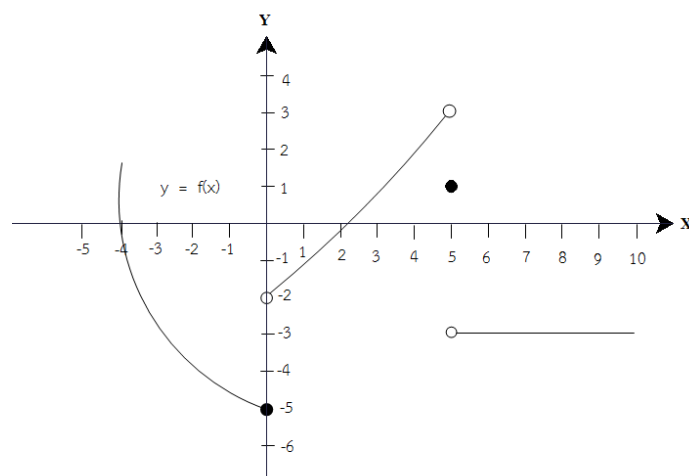
และ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

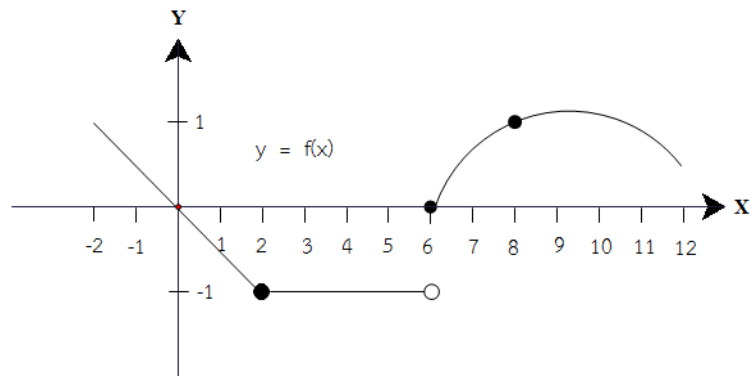
เฉลยแบบฝึกทักษะ 1.3

1.



- วิธีทำ**
1. เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย ($x < 0$) จะได้ว่า ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ -5
 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -5$
 2. เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา ($x > 0$) จะได้ว่า ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ -2
 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2$
 3. เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้
 4. เมื่อ x เข้าใกล้ 5 ทางด้านซ้าย ($x < 5$) จะได้ว่า ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 3
 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 3$
 5. เมื่อ x เข้าใกล้ 5 ทางด้านขวา ($x > 5$) จะได้ว่า ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ -3
 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -3$
 6. เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$
 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ หาค่าไม่ได้
 7. ค่าของฟังก์ชัน f ที่ $x = 5$ มีค่าเป็น 1 ดังนั้น $f(5) = 1$

2.



วิธีทำ

1. เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$ และ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1$
 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$
2. เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1$ และ $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -1$
 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$
3. ค่าของฟังก์ชัน f ที่ $x = 8$ มีค่าเป็น 1 ดังนั้น $f(8) = 1$